INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND VIERTES HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 6. Juni 1957

Postverlagsort Berlin *Preis DM 11.40*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Kneschke, A., Rollreibung auf spurbildender Fahrbahn. Mit 9 Abbildungen ... 227

Stückler, B., Ein weiterer Beitrag zur Theorie der Bewegung rollender Fahrzeuge. Mit 2 Abbildungen ... 244

Scherer, A., Einflußflächen einer Dreiecksplatte mit Aufpunkt am freien Rand. Mit 10 Abbildungen ... 255

Helmbold, H. B., Grenzen des Tragflügelauftriebs. Mit 1 Abbildung ... 273

Schwarze, G., Allgemeine Stabilitätstheorie der Schalen. Mit 3 Abbildungen ... 278

Schmieden, C., Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden. I. Mitteilung. Mit 5 Abbildungen ... 292

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND VIERTES HEFT 1957

Rollreibung auf spurbildender Fahrbahn

Von A. Kneschke*

1. Einleitung. Die gleichförmig rollende Bewegung eines schweren Kreiszylinders (Rad) auf einer Ebene (Fahrbahn) kann auf zweifache Weise aufrecht erhalten werden: durch eine Zugkraft, die dem Bewegungswiderstand (Rollwiderstand) das Gleichgewicht hält, oder durch ein dem Rad aufgeprägtes Triebmoment, das mit dem zwischen Rad und Fahrbahn auftretenden Reibungsmoment (Rollmoment) im Gleichgewicht steht. Für diese beiden Fälle soll die rollende Reibung eines starren Rades unter der Voraussetzung untersucht werden, daß auf der ebenen Fahrbahn eine als sehr zähflüssig angenommene, spurbildende Schicht liegt, die sich verschiedenartig auf den Rollvorgang auswirkt, je nachdem, ob es sich um das gezogene oder getriebene Rad handelt. Die zu untersuchende Rollbewegung vollzieht sich demnach unter dem Einfluß dieser dünnen Zwischenschicht, so daß die Anwendung der Mechanik zäher Medien nahe liegt. Die im einzelnen angegebenen vereinfachenden Voraussetzungen ermöglichen, wie sich zeigen wird, eine sehr weitgehende Beschreibung des Rollvorganges.

Für die Erscheinung der Rollreibung, die durch die unmittelbare Berührung eines elastischen Rades und einer elastischen Schiene verursacht wird, hat unter Berücksichtigung der auftretenden Normal- und Schubkräfte *L. Föppl*[1] eine strenge Lösung angegeben.

Im Falle der zwischen Rad und Fahrbahn auftretenden zähen Zwischenschicht, deren Dicke als klein gegenüber dem Raddurchmesser vorausgesetzt werden soll, wird es darauf ankommen, die in dem Rollspalt zwischen Rad und Fahrbahn beim Überrollen der Zwischenschicht auftretende Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit und des Druckes zu ermitteln, aus denen sich dann der Rollwiderstand bzw. das Rollmoment ergeben wird. Es wird sich zeigen, daß die hierfür notwendigen Betrachtungen in einer engen Beziehung zur hydrodynamischen Theorie des Walzvorganges stehen.

Die rollende Bewegung des Rades mit der Umfangsgeschwindigkeit U^* über die Fahrbahn kann man als einen Walzvorgang durch eine um eine ortsfeste Achse drehende Walze (Rad) und eine mit der Geschwindigkeit U gleichsinnig bewegte Ebene (Fahrbahn) auffassen. Dabei sollen die in der überrollten Schicht zwischen Rad und Fahrbahn auftretenden Schubkräfte an der oberen und unteren Begrenzung des Rollspaltes vom Radumfang und der starren Fahrbahn vollständig aufgenommen werden. Mithin wollen wir ein vollständiges Haften der zähflüssigen Zwischenschicht an den Rändern des Rollspaltes voraussetzen und demnach für die Strömungsgeschwindigkeit u die Randbedingungen

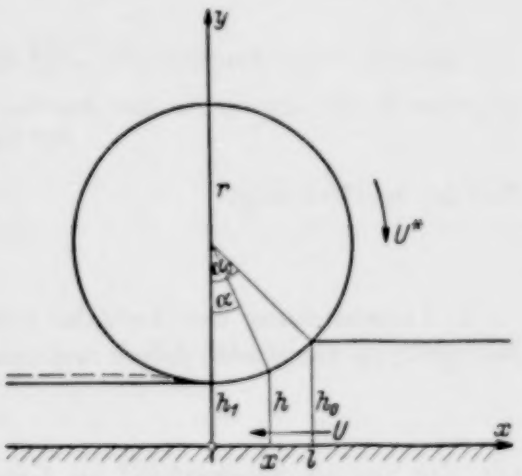

Abb. 1. Rollspalt.

$$u\big|_{y=0} = -U\,, \quad u\big|_{y=h} = -U^*$$

annehmen. Dabei ist h die von der Koordinate x abhängige Spalthöhe (Abb. 1). Über die Geschwindigkeit U^* des Rades in ihrer Beziehung zur Geschwindigkeit U ist vorläufig nichts ausgesagt. Wir werden erst dann, wenn wir die allgemeinen Betrachtungen schließlich auf die eingangs geschilderten Fälle für den Antrieb des Rades anwenden, Genaueres über die Größe U^* im Verhältnis zu U erfahren. Die auf Grund des Verformungsvorganges auftretende Schichtenbreitung senkrecht zur Radebene, die die durch die Höhenabnahme verursachte Verschiebung der zähen Zwischenschicht teilweise aufnehmen würde, soll unberücksichtigt bleiben. Es handelt sich demnach um ein ebenes Problem.

---

* Vorgetragen auf dem 9. Internationalen Mechanik-Kongreß in Brüssel am 11. 9. 1956.

[1] *L. Föppl*, Die strenge Lösung für die rollende Reibung, München 1947.

2. Lagebeziehungen. Unseren Betrachtungen liegt ein Rollspalt zugrunde, der durch die Belastung eines starren Rades vom Halbmesser r auf die als zähflüssig angenommene Schicht von der ursprünglichen Dicke h_0 entstanden ist. Die Radbreite sei b. Die im Aufriß durch den Grenzwinkelbogen α_0 dargestellte obere Begrenzung des Rollspaltes ist durch die Eingrifftiefe $h_0 - h_1$ festgelegt, die im Spalt veränderliche Höhe h durch den Winkel α. Alle Abmessungen werden auf das in Abb. 1 eingezeichnete rechtwinklige (x, y)-System bezogen. Es ist zweckmäßig, den Kreisbogen, der den Rollspalt abgrenzt, näherungsweise durch einen Parabelbogen zu ersetzen, dessen Parameter gleich dem Raddurchmesser ist. Wir erhalten dann die in der x-Richtung veränderliche Spalthöhe

$$h = h_1 + \frac{x^2}{2r}$$

oder, wenn wir den Winkel $\alpha \approx x/r$ und die Abkürzungen

$$\lambda^2 = \frac{2h}{r}, \quad \lambda_1^2 = \frac{2h_1}{r}, \quad \lambda_0^2 = \frac{2h_0}{r}$$

einführen,

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 + \alpha^2, \qquad \lambda_0^2 = \lambda_1^2 + \alpha_0^2. \tag{a}$$

Für die im Rollspalt veränderliche Größe $(h - h_1)/h = \delta$, die für $h = h_0$ in die relative Eingrifftiefe $\delta_0 = (h_0 - h_1)/h_0$, die wir kurz als **Eingriffziffer** bezeichnen wollen, übergeht, gelten die Beziehungen

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \sqrt{1 - \frac{h_1}{h}} = \sqrt{\delta}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = \sqrt{1 - \delta}. \tag{b}$$

Wir werden später durch die Beziehung

$$\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi = \alpha, \quad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\lambda_1}{\cos^2 \varphi} \tag{c}$$

eine Hilfsvariable φ einführen. Für diese gilt nach (a)

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\alpha}{\lambda} = \sqrt{1 - \frac{h_1}{h}} = \sqrt{\delta}, \\ \cos \varphi &= \frac{\lambda_1}{\lambda} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = \sqrt{1 - \delta}, \\ \sin \varphi_0 &= \sqrt{1 - \frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\delta_0}, \\ \cos \varphi_0 &= \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{1 - \delta_0}. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Aus (a) und (c) folgt

$$h = \frac{h_1}{\cos^2 \varphi}. \tag{e}$$

3. Formulierung der Aufgabe und ihre Integration. Um die Bewegung und die Kräfte im Rollspalt zu ermitteln, gehen wir von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \tag{1}$$

aus, die von *A. Sommerfeld*[1] als Grundlage für die hydrodynamische Theorie der Lagerreibung verwendet wurde. Sie stellt eine Beziehung zwischen dem isotropen Flüssigkeitsdruck $p(x)$ und der x-Komponente $u(y)$ der Geschwindigkeit bei einer Strömung in einem von parallelen Ebenen begrenzten engen Spalt dar. Dabei ist η die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit. Man kann die Differentialgleichung (1), wie in einer Arbeit von *G. Duffing*[2] bestätigt wird, aber auch dann anwenden, wenn die Strömung in einem Spalt erfolgt, dessen Begrenzungsebenen schwach geneigt sind. Dann ist $p(x)$ nicht mehr linear von x abhängig, und die Geschwindigkeitskomponente u ist außer von y auch von x abhängig. Die Geschwindigkeitskomponente in der y-Richtung wird dabei vernachlässigt, und $\partial^2 u/\partial x^2$ wird gegenüber $\partial^2 u/\partial y^2$ als klein betrachtet. Diese Voraussetzungen sind bei dem nach oben parabolisch begrenzten Rollspalt weitgehend erfüllt, so daß wir berechtigt sind, die Differentialgleichung (1) auch auf die Strömung im Rollspalt anzuwenden.

[1] *A. Sommerfeld*, Z. Math. Phys. 50 (1904), S. 97.
[2] *G. Duffing*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 296.

Der Rollspalt selbst soll sich in allen weiteren Betrachtungen entsprechend Abb. 1 über das Intervall $h_1 \leqq h \leqq h_0$ erstrecken. Auch darin liegt eine die Rechnung vereinfachende Voraussetzung.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $u\big|_{y=0} = -U$ und $u\big|_{y=h} = -U^*$ lautet die Lösung von (1)

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}(y^2 - h\,y) + \frac{U - U^*}{h}y - U\,, \tag{2}$$

worin h nunmehr als Funktion von x anzusehen ist. Die Durchflußmenge Q in der Zeiteinheit auf der Radbreite b ermittelt man aus

$$Q = -b\int_0^h u\,dy$$

zu

$$Q = b\left(\frac{U + U^*}{2}h + \frac{h^3}{12\,\eta}\frac{dp}{dx}\right).$$

Die Kontinuität des Flüssigkeitsstromes im Rollspalt ist gewährleistet, wenn die durch seinen Querschnitt strömende Menge an jeder Stelle x einen konstanten Wert hat. Daher muß die Druckverteilung $p(x)$ so gewählt werden, daß Q von x unabhängig wird, daß also

$$\frac{U + U^*}{2}\frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{h^3}{12\,\eta}\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

ist. Dies liefert, wenn h^* als Integrationskonstante eingeführt wird, das Druckgefälle

$$\frac{dp}{dx} = -6\,\eta\,(U + U^*)\frac{h - h^*}{h^3}\,. \tag{3}$$

Die Konstante h^* stellt damit die Spalthöhe dar, für die der Druck extrem wird. Der konstante Durchfluß ergibt sich demnach zu

$$Q = b\,\frac{U + U^*}{2}h^*\,. \tag{4}$$

Aus (2) folgt, daß im Querschnitt bei h^* die lineare Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit

$$u = \frac{U - U^*}{h}y - U$$

herrscht. Wir wollen diesen Querschnitt Fließscheide nennen. Bezeichnet man nämlich die mittlere Strömungsgeschwindigkeit über einen Querschnitt mit $\bar{U}$, so gilt die Beziehung

$$\frac{Q}{b\,h} = \bar{U}\,,$$

die in Verbindung mit (4) zu

$$\bar{U} = \frac{U + U^*}{2}\frac{h^*}{h}$$

führt. Man erkennt daraus, daß links der Fließscheide die mittlere Geschwindigkeit $\bar{U}$ größer ist als rechts davon. An der Fließscheide selbst ist

$$\bar{U} = \bar{U}^* = \frac{U + U^*}{2}\,.$$

Es bestehen demnach im Rollspalt zwei hinsichtlich der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung verschiedenartige Gebiete: ein Gebiet der Voreilung links von h^* und ein Gebiet der Nacheilung rechts von h^*. Im Bereich der Voreilung ist das Druckgefälle positiv, im Gebiet der Nacheilung negativ, an der Fließscheide erreicht der Druck einen maximalen Wert.

Um die Fließscheide festzulegen, benutzen wir die Tatsache, daß am Radeingriff $h = h_0$ und am Radauslauf $h = h_1$ jeweils der Druck $p = 0$ herrscht. Wir setzen dabei voraus, daß die nicht durch den Rollspalt abströmende Restmasse der Schicht von der Dicke h_0 am Radeingriff nach beiden Seiten der eingreifenden Radbreite abströmt, ohne daß ein nennenswerter Staudruck dabei entsteht. Die Durchflußmenge, für die $Q \leqq b\,U\,h_0$ gelten muß, wird links der Auslaufstelle bei $x = 0$ auf der Fahrbahn abgesetzt und wird im allgemeinen eine Spurtiefe $h_0 - h$ verursachen, die kleiner als die Eingrifftiefe $h_0 - h_1$ ist. Für die Größe des Strömungsdruckes wird vornehmlich der von h_1 bis h_0 sich erstreckende Rollspalt maßgebend sein.

Aus (3) erhalten wir mit $x = r\alpha$ unter Berücksichtigung von (c) und (e)

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{24\,\eta\,(U+U^*)}{r\,\lambda_1^3}\left(\cos^2\varphi - \frac{h^*}{h_1}\cos^4\varphi\right), \tag{5}$$

woraus durch Integration über den Spalt die Beziehung

$$\int_0^{\varphi_0} dp = p(\varphi_0) - p(0) = -\frac{6\,\eta\,(U+U^*)}{r\,\lambda_1^3}\left\{2(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0) - \frac{h^*}{h_1}\left[\frac{3}{2}(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0) + \sin\varphi_0\cos^3\varphi_0\right]\right\}$$

folgt. Wegen des Verschwindens von p an den Randstellen ergibt sich daraus

$$\frac{h^*}{h_1} = 2\,\frac{\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0}{\frac{3}{2}(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0) + \sin\varphi_0\cos^3\varphi_0}.$$

Führen wir hier die Eingriffziffer δ_0 ein, so wird nach (d)

$$\frac{h^*}{h_1} = 2\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0} + \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}}{\frac{3}{2}\left(\arcsin\sqrt{\delta_0} + \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}\right) + \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)^3}}. \tag{6}$$

Um die Lage x^* der Fließscheide im Rollspalt von der Länge

$$l = r\,\alpha_0 = \sqrt{2\,r\,h_0\,\delta_0}$$

zu ermitteln, gehen wir von der Beziehung

$$h^* = h_1 + \frac{x^{*2}}{2\,r}$$

aus und erhalten mit $h_1 = h_0(1-\delta_0)$

$$\frac{x^*}{l} = \sqrt{\frac{1-\delta_0}{\delta_0}\left(\frac{h^*}{h_1} - 1\right)}.$$

Tabelle 1

δ_0	$\frac{h^*}{h_1}$	$\frac{h^*}{h_0}$	$\frac{x^*}{l}$	A	$\frac{\sqrt{1-\delta_0}}{A\arcsin\sqrt{\delta_0}}$
0,000	1,000	1,000	0,577	1,000	∞
0,025	1,008	0,983	0,572	1,000	6,220
0,05	1,017	0,966	0,566	0,999	4,325
0,10	1,034	0,931	0,553	0,997	2,957
0,15	1,051	0,894	0,540	0,993	2,334
0,20	1,069	0,855	0,526	0,987	1,954
0,25	1,087	0,815	0,512	0,980	1,688
0,30	1,106	0,774	0,496	0,969	1,489
0,35	1,124	0,731	0,480	0,956	1,332
0,40	1,142	0,686	0,463	0,940	1,203
0,45	1,161	0,639	0,444	0,921	1,095
0,50	1,180	0,590	0,425	0,898	1,003
0,55	1,199	0,540	0,404	0,870	0,923
0,60	1,218	0,487	0,381	0,836	0,853
0,65	1,236	0,433	0,357	0,797	0,791
0,70	1,254	0,376	0,330	0,751	0,736
0,75	1,271	0,318	0,301	0,696	0,686
0,80	1,288	0,258	0,268	0,630	0,642
0,85	1,303	0,195	0,231	0,549	0,601
0,90	1,316	0,132	0,187	0,449	0,564
0,95	1,327	0,066	0,128	0,313	0,531
1,00	1,333	0,000	0,000	0,000	0,500

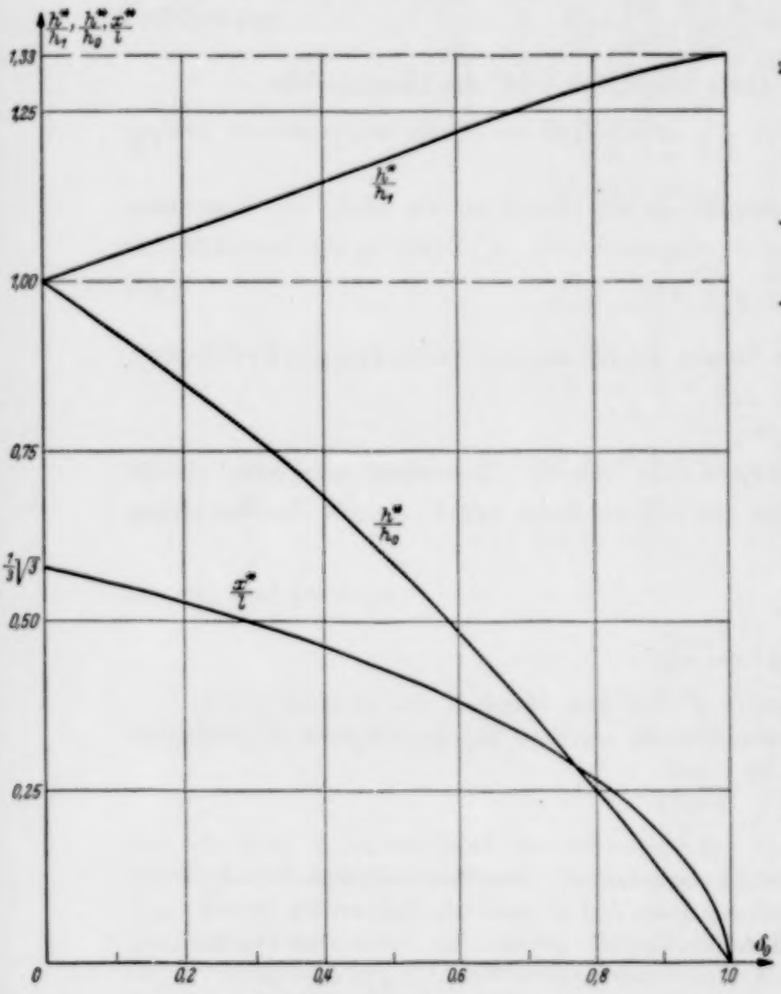

Abb. 2. $\frac{h^*}{h_1}$, $\frac{h^*}{h_0}$ und $\frac{x^*}{l}$ als Funktionen von δ_0.

Abb. 2 zeigt den Verlauf von h^*/h_1, $h^*/h_0 = (h^*/h_1)(1-\delta_0)$ und x^*/l als Funktionen von δ_0; die Werte sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

Zur Berechnung der Druckverteilung im Rollspalt integrieren wir (5) unter Berücksichtigung der Randbedingungen $p(0) = p(\varphi_0) = 0$. Man erhält

$$P\,\frac{r\,\lambda_1^3}{6\,\eta\,(U+U^*)} = \left[\frac{3}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \sin\varphi\cos^3\varphi\right]\frac{h^*}{h_1} - 2\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$

und daraus nach (d)

$$P\frac{r\lambda_1^3}{6\eta(U+U^*)}=\left[\frac{3}{2}\left(\arcsin\sqrt{\delta}+\sqrt{\delta(1-\delta)}\right)+\sqrt{\delta(1-\delta)^3}\right]\frac{h^*}{h_1}-2\left(\arcsin\sqrt{\delta}+\sqrt{\delta(1-\delta)}\right). \qquad (7)$$

Man sieht, daß für $\delta=0$ und $\delta=\delta_0$ der Druck tatsächlich verschwindet, wenn h^*/h_1 nach (6) eingesetzt wird.

4. Resultierende Druckkraft und Reibungsmoment. Die Wirkungslinie der Resultierenden P der radial am Radumfang wirkenden Druckkräfte $bprd\alpha$ und der tangential wirksamen hydrodynamischen Reibungskräfte

$$-bqr\,d\alpha=b\tau r\,d\alpha=b\eta\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}r\,d\alpha$$

bildet mit der Vertikalen den Winkel $\bar{\alpha}$ (Abb. 3). Dabei beträgt die am Radumfang auftretende Schubspannung τ nach (2)

$$\tau\big|_{y=h}=\eta\frac{U-U^*}{h}+\frac{h}{2r}\frac{dp}{d\alpha}. \qquad (8)$$

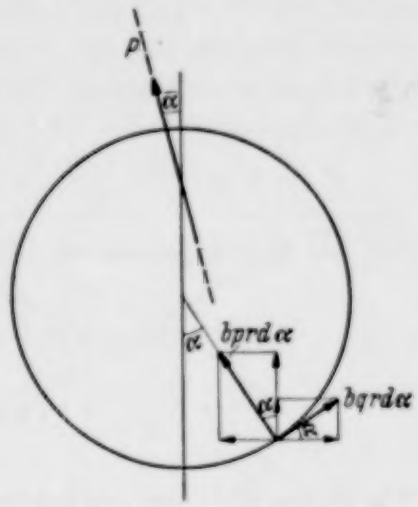

Abb. 3. Kräfte am rollenden Rad.

Die resultierende Druckkraft hat dann die Komponenten

$$P\sin\bar{\alpha}=br\int_0^{\alpha_0}p\sin\alpha\,d\alpha+br\int_0^{\alpha_0}\tau\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$P\cos\bar{\alpha}=br\int_0^{\alpha_0}p\cos\alpha\,d\alpha-br\int_0^{\alpha_0}\tau\sin\alpha\,d\alpha.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen für p wird

$$\int_0^{\alpha_0}p\sin\alpha\,d\alpha=\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\cos\alpha\,d\alpha,\quad \int_0^{\alpha_0}p\cos\alpha\,d\alpha=-\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\sin\alpha\,d\alpha,$$

so daß

$$P\sin\bar{\alpha}=br\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{dp}{d\alpha}+\tau\right)\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$P\cos\bar{\alpha}=-br\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{dp}{d\alpha}+\tau\right)\sin\alpha\,d\alpha$$

st. Mittels (8) ergibt sich hieraus

$$P\sin\bar{\alpha}=br\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\left(1+\frac{h}{2r}\right)\cos\alpha\,d\alpha+br\eta(U-U^*)\int_0^{\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{h}d\alpha,$$

$$P\cos\bar{\alpha}=-br\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\left(1+\frac{h}{2r}\right)\sin\alpha\,d\alpha-br\eta(U-U^*)\int_0^{\alpha_0}\frac{\sin\alpha}{h}d\alpha.$$

Bei der Anwendung dieser Betrachtungen auf das rollende Rad sind wir berechtigt,

$$\sin\alpha\approx\alpha,\quad \cos\alpha\approx1-\frac{\alpha^2}{2},\quad h=h_1+\frac{r}{2}\alpha^2$$

zu setzen und $h_1/2r$ gegen Eins zu vernachlässigen.
Dann erhalten wir näherungsweise

$$P\sin\bar{\alpha}=br\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)d\alpha+br\eta(U-U^*)\int_0^{\alpha_0}\frac{1-\frac{\alpha^2}{2}}{h}d\alpha,$$

$$P\cos\bar{\alpha}=-br\int_0^{\alpha_0}\frac{dp}{d\alpha}\alpha\,d\alpha-br\eta(U-U^*)\int_0^{\alpha_0}\frac{\alpha}{h}d\alpha$$

und für

$$h=\frac{h_1}{\cos^2\varphi},\quad \alpha=\lambda_1\operatorname{tg}\varphi$$

mit Berücksichtigung der Randbedingungen für p

$$P\sin\bar{\alpha} = -\frac{b\,r\,\lambda_1^2}{4}\int_0^{\varphi_0}\frac{dp}{d\varphi}\,\mathrm{tg}^2\varphi\,d\varphi + \frac{2\,b\,\eta}{\lambda_1}(U-U^*)\,\varphi_0\,,$$

$$P\cos\bar{\alpha} = -\,b\,r\,\lambda_1\int_0^{\varphi_0}\frac{dp}{d\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi + 2\,b\,\eta\,(U-U^*)\ln\cos\varphi_0\,.$$

Wenn man (5) einführt, folgt daraus durch Berechnung der Integrale

$$P\sin\bar{\alpha} = \frac{3\,b\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1}\left[\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi_0 - \frac{h^*}{4\,h_1}(\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi_0 + 2\sin^3\varphi_0\cos\varphi_0)\right] + \frac{2\,b\,\eta\,(U-U^*)}{\lambda_1}\varphi_0\,,$$

$$P\cos\bar{\alpha} = \frac{12\,b\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1^2}\sin^2\varphi_0\left[1 - \frac{h^*}{2\,h_1}(1+\cos^2\varphi_0)\right] + 2\,b\,\eta\,(U-U^*)\ln\cos\varphi_0\,.$$

Für das Reibungsmoment bezüglich der Radachse ergibt sich in ähnlicher Weise

$$M = b\,r^2\int_0^{\alpha_0} q\,dx = -\frac{b\,r\,h_1}{2}\int_0^{\varphi_0}\frac{dp}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{2\,b\,r\,\eta\,(U-U^*)}{\lambda_1}\varphi_0\,,$$

$$M = \frac{6\,b\,r\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1}\left[\varphi_0 - \frac{h^*}{2\,h_1}(\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0)\right] - \frac{2\,b\,r\,\eta\,(U-U^*)}{\lambda_1}\varphi_0\,.$$

Wir wollen die eben ermittelten Größen in ihrer Abhängigkeit von der Eingriffziffer δ_0 mittels (d) anschreiben. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} P\sin\bar{\alpha} &= \frac{3\,b\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1}\left[\arcsin\sqrt{\delta_0} - \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)} - \frac{h^*}{4\,h_1}\left(\arcsin\sqrt{\delta_0} + (2\,\delta_0-1)\sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}\right)\right] \\ &\quad + \frac{2\,b\,\eta\,(U-U^*)}{\lambda_1}\arcsin\sqrt{\delta_0}\,, \\ P\cos\bar{\alpha} &= \frac{12\,b\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1^2}\,\delta_0\left[1 - \frac{h^*}{2\,h_1}(2-\delta_0)\right] + b\,\eta\,(U-U^*)\ln(1-\delta_0)\,, \\ M &= \frac{6\,b\,r\,\eta\,(U+U^*)}{\lambda_1}\left[\arcsin\sqrt{\delta_0} - \frac{h^*}{2\,h_1}\left(\arcsin\sqrt{\delta_0} + \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}\right)\right] \\ &\quad - \frac{2\,b\,r\,\eta\,(U-U^*)}{\lambda_1}\arcsin\sqrt{\delta_0}\,. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Diese allgemeinen Ergebnisse werden wir nun auf die eingangs erwähnten beiden Fälle des gezogenen und getriebenen Rades anwenden. Es wird sich dabei zeigen, daß die bisher noch willkürliche Umfangsgeschwindigkeit U^* des Rades in ihrer Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit U und der Eingriffziffer δ_0 festgelegt wird.

5. Das gezogene Rad. Da das gezogene Rad kein Moment aufnimmt, muß die Bedingung

$$\int_0^{\alpha_0}\tau\big|_{y=h}\,dx = 0$$

erfüllt sein. Das ergibt nach (9)

$$3(U+U^*)\left(1 - \frac{h^*}{2\,h_1}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0} + \sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}}{\arcsin\sqrt{\delta_0}}\right) = U - U^*\,,$$

woraus, wenn

$$A = \frac{\left[2 - \frac{h^*}{h_1}(1-\delta_0)\right]\sqrt{\delta_0(1-\delta_0)}}{\arcsin\sqrt{\delta_0}} \quad (10)$$

gesetzt wird,

$$\frac{U^*}{U} = \frac{A}{2-A}\,, \quad \frac{U+U^*}{U} = \frac{2}{2-A}\,, \quad \frac{U-U^*}{U} = 2\,\frac{1-A}{2-A}\,. \quad (11)$$

Damit sind U^* und der relative Schlupf $(U-U^*)/U$ zwischen Rad und Fahrbahn in Abhängigkeit von der Eingriffziffer δ_0 festgelegt. Die Schichthöhe $\bar{h}$ auf der überrollten Fahrbahn (Abb. 4)

beträgt nach (4)

$$\frac{Q}{b\,U} = \bar{h} = \frac{U + U^*}{U}\frac{h^*}{2} = h_0 \frac{h^*}{h_1}\frac{1-\delta_0}{2-A},$$

so daß wir als relative Spurtiefe $(h_0 - \bar{h})/h_0 = \bar{\delta}_0$, die wir kurz Spurziffer nennen wollen,

$$\bar{\delta}_0 = 1 - \frac{h^*}{h_1}\frac{1-\delta_0}{2-A} = 1 - \frac{h^*}{h_0 A}\frac{U^*}{U} \tag{12}$$

erhalten. Mit den in Tabelle 1 ersichtlichen Werten ist in Abb. 5 der Verlauf von A gezeichnet; mit den Werten von U^*/U und $\bar{\delta}_0$ in Tabelle 2 ergeben sich die Bildkurven für U^*/U und für die Spurziffer $\bar{\delta}_0$. Es tritt demnach ein mit der Eingriffziffer wachsender Schlupf zwischen Rad und Fahrbahn auf. Die Spurtiefe $h_0 - \bar{h}$ bleibt für $\delta_0 < 0{,}7$ merklich unterhalb der Eingrifftiefe $h_0 - h_1$. Für $\delta_0 > 0{,}7$, also besonders großen Schlupf, überschreitet die Spurtiefe geringfügig die Eingrifftiefe. Der Anteil des Gleitens am Bewegungsvorgang des gezogenen Rades ist in diesem Falle wesentlich größer als der des Rollens. Bei einer Abtrennung der Schicht durch eine über alle Grenzen wachsende Belastung kann das Rad nur gleiten, nicht rollen, da eine hydrodynamische Reibung dann nicht vorhanden ist. Bei Punktberührung ist $U = U^*$, also reines Rollen, festzustellen. Beide Grenzfälle treten jedoch praktisch nicht ein.

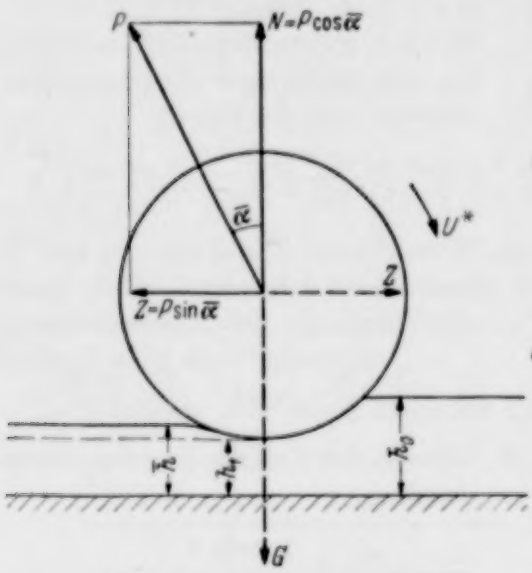

Abb. 4. Kräfte am gezogenen Rad.

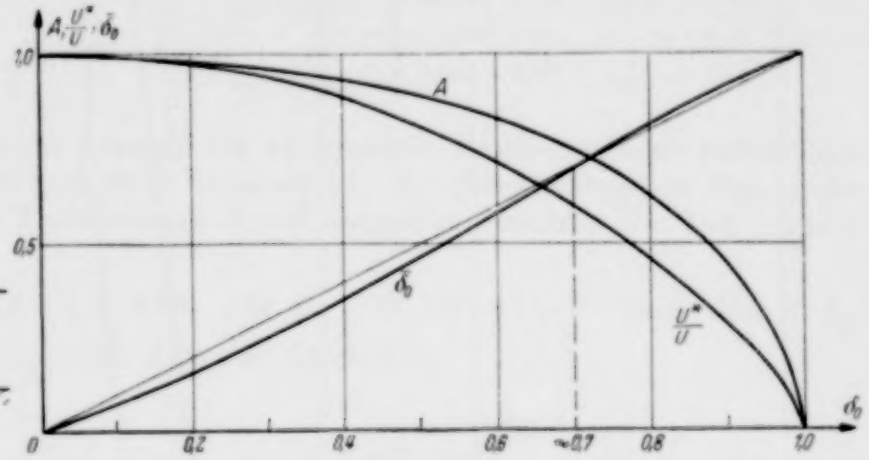

Abb. 5. Verlauf von A, U^*/U und $\bar{\delta}_0$ für das gezogene Rad.

Die Normalkomponente $N = P\cos\bar{\alpha}$ der resultierenden Druckkraft P beträgt nach (9)

$$\frac{N}{b\,\eta\,U} = \frac{P\cos\bar{\alpha}}{b\,\eta\,U}$$

$$= \frac{2}{2-A}\left\{(1-A)\ln(1-\delta_0) + 3\left(\frac{2r}{h_0}\right)\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1 - \frac{h^*}{2h_1}(2-\delta_0)\right]\right\}. \tag{13a}$$

Es zeigt sich, daß für

$$\frac{2r}{h_0} \geqq 25$$

der Betrag von

$$2\frac{1-A}{2-A}\ln(1-\delta_0)$$

in dem Bereiche von $0 < \delta_0 < 1$ unterhalb 1% des Wertes von

$$\frac{6}{2-A}\left(\frac{2r}{h_0}\right)\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1 - \frac{h^*}{2h_1}(2-\delta_0)\right]$$

liegt. Deshalb kann der erste Summand unberücksichtigt bleiben, so daß sich aus (13a)

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} = \frac{6}{2-A}\,\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1 - \frac{h^*}{2h_1}(2-\delta_0)\right] \tag{13b}$$

ergibt. Durch die Beschränkung auf hinreichend kleine Werte von $h_0/2r$ wird außerdem den eingangs erwähnten Voraussetzungen für die Anwendung der Differentialgleichung (1) Rechnung

Tabelle 2

δ_0	$\frac{U^*}{U}$	$\bar{\delta}_0$
0,000	1,000	0,000
0,025	1,000	0,017
0,05	0,999	0,035
0,10	0,994	0,072
0,15	0,987	0,112
0,20	0,975	0,155
0,25	0,960	0,201
0,30	0,941	0,249
0,35	0,916	0,300
0,40	0,888	0,353
0,45	0,853	0,408
0,50	0,814	0,465
0,55	0,769	0,523
0,60	0,719	0,581
0,65	0,663	0,640
0,70	0,601	0,699
0,75	0,533	0,756
0,80	0,459	0,812
0,85	0,379	0,865
0,90	0,289	0,915
0,95	0,186	0,961
1,00	0,000	1,000

getragen. Mit wachsender Schichtdicke h_0 oder abnehmendem Raddurchmesser $2r$ wächst bei konstanter Belastung N des Rades und konstanter Fahrgeschwindigkeit U die Eingriffziffer δ_0 und damit auch die Spurziffer $\bar{\delta}_0$. Die Belastbarkeit bei konstanter Spurtiefe und Fahrgeschwindigkeit ist proportional dem Raddurchmesser und umgekehrt proportional der Schichtdicke. Mit größer werdender Fahrgeschwindigkeit nimmt bei konstanter Belastung die Spurtiefe ab. Eine Erhöhung von U ermöglicht bei gleichbleibender Spurtiefe eine größere Belastung. Abb. 6 gibt den Verlauf der Belastungsfunktion (13b) wieder.

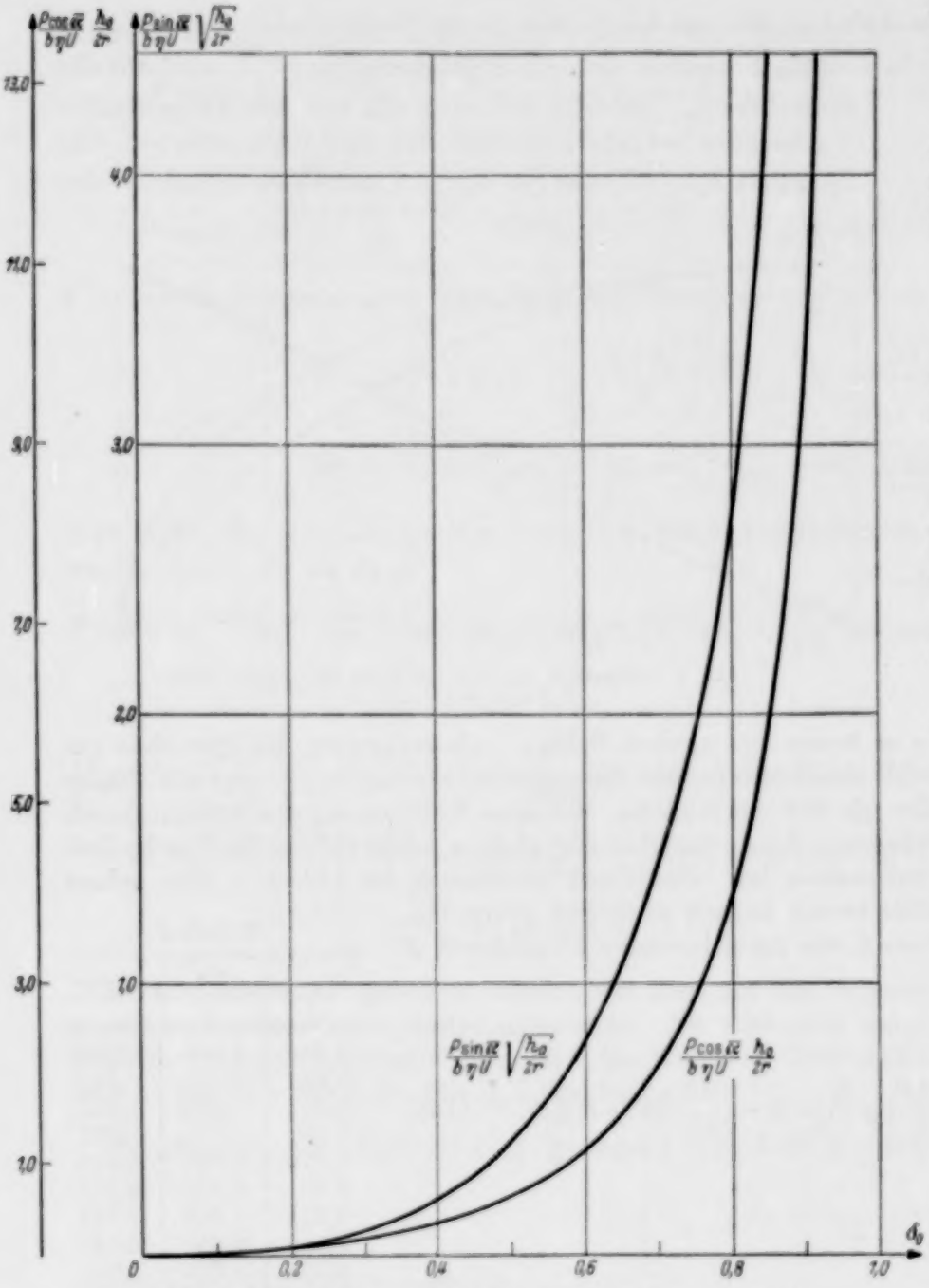

Abb. 6. Fahrwiderstand und Normalbelastung für das gezogene Rad.

Die Horizontalkomponente

$$Z = P \sin \bar{\alpha},$$

die den Fahrwiderstand darstellt, ist auf Grund einer längeren, aber elementaren Rechnung

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}} = 4\,\frac{1-A}{2-A}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}} \tag{14}$$

und wird durch Abb. 6 veranschaulicht. Die Zahlenwerte

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2\,r} \quad \text{und} \quad \frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$$

können der Tabelle 3 entnommen werden.

Tabelle 3

δ_0	$\frac{P\cos\bar{\alpha}}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2\,r}$	$\frac{P\sin\bar{\alpha}}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$
0,00	0,000	0,000
0,05	0,003	0,001
0,10	0,012	0,004
0,15	0,029	0,012
0,20	0,056	0,026
0,25	0,095	0,048
0,30	0,150	0,082
0,35	0,225	0,131
0,40	0,324	0,199
0,45	0,453	0,291
0,50	0,625	0,413
0,55	0,848	0,575
0,60	1,142	0,788
0,65	1,535	1,069
0,70	2,072	1,444
0,75	2,834	1,955
0,80	3,981	2,677
0,85	5,878	3,764
0,90	9,608	5,614
0,95	20,495	9,798
1,00	∞	∞

Durch die Verbindung von (13b) und (14) kann man den Rollvorgang vollständig beschreiben. Aus (13b) ermittelt man für die den gegebenen Parametern N, h_0, r, η, U entsprechende Eingriffziffer δ_0. Daraus ergibt sich aus (14) der Fahrwiderstand Z und aus (12) die Spurziffer $\bar{\delta}_0$.

An drei verschiedenartigen Beispielen, für die wir $\eta = 0{,}01$ kg s/cm² und $b = 10$ cm zugrunde legen, soll der Rechengang gezeigt werden.

1. Vorausgesetzt wird $\frac{h_0}{2\,r} = 0{,}02$; $U = 100$ cm/s. Für $N = 300,\ 400,\ 500,\ 600$ kg sind Z, δ_0, $\bar{\delta}_0$, $\frac{U-U^*}{U}$ und die Leistung L zu ermitteln. Man erhält die Ergebnisse der Tabelle auf S. 235 oben links. Bei konstanten Werten von $h_0/2r$ und U wachsen mit zunehmender Belastung Fahrwiderstand und Spurziffer. Auch der relative Schlupf nimmt dabei zu.

2. Vorausgesetzt wird $U = 100$ cm/s, $N = 500$ kg. Für $\frac{h_0}{2r} = \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{75}, \frac{1}{100}$ sind Z, δ_0, $\bar{\delta}_0$, $\frac{U - U^*}{U}$ und L zu ermitteln. Man erhält folgende Ergebnisse:

N kg	300	400	500	600
δ_0	0,50	0,54	0,58	0,61
$\bar{\delta}_0$	0,46	0,51	0,56	0,60
$\frac{U - U^*}{U}$	0,18	0,22	0,26	0,29
Z kg	28,3	37,8	49,0	59,0
L PS	0,38	0,50	0,65	0,78

$\frac{h_0}{2r}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{100}$
δ_0	0,70	0,58	0,51	0,47
$\bar{\delta}_0$	0,70	0,56	0,48	0,43
$\frac{U - U^*}{U}$	0,39	0,26	0,19	0,16
Z kg	70,6	49,0	38,2	32,0
L PS	0,94	0,65	0,50	0,43

Bei konstanten Werten von U und N nehmen mit wachsendem Raddurchmesser Fahrwiderstand und Spurtiefe ab, insofern die Schichtdicke konstant ist. Bei gleichbleibendem Raddurchmesser nehmen mit der Schichtdicke Fahrwiderstand und Spurziffer ebenfalls ab. Der relative Schlupf wird dabei geringer.

3. Vorausgesetzt wird $N = 500$ kg, $\frac{h_0}{2r} = 0{,}02$. Für $U = 50, 100, 150, 200$ cm/s sind Z, δ_0, $\bar{\delta}_0$, $\frac{U - U^*}{U}$ und L zu ermitteln. Man erhält folgende Ergebnisse:

U cm/s	50	100	150	200
δ_0	0,70	0,58	0,51	0,47
$\bar{\delta}_0$	0,70	0,56	0,48	0,43
$\frac{U - U^*}{U}$	0,39	0,26	0,19	0,16
Z kg	50,0	49,0	46,6	45,2
L PS	0,33	0,66	0,93	1,20

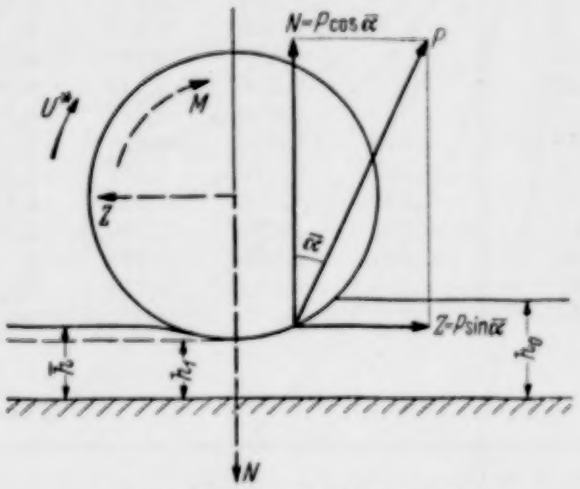

Abb. 7. Kräfte am getriebenen Rad.

Bei konstanten Werten von N und $h_0/2r$ nehmen mit wachsender Fahrgeschwindigkeit Fahrwiderstand und Spurziffer ab. Auch der relative Schlupf wird dabei geringer.

6. Das getriebene Rad. Wir wollen nun annehmen, daß die gleichförmige Rollbewegung durch ein auf das Rad wirkendes Drehmoment aufrechterhalten wird und gleichzeitig eine Zugkraft Z an der Radachse wirksam ist (Abb. 7).

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P \sin \bar{\alpha} + Z = 0$$

ergibt sich mittels (9) durch Auflösen nach U^*, wenn man wieder

$$A = \frac{\left(2 - \frac{h^*}{h_1}(1 - \delta_0)\right)\sqrt{\delta_0 (1 - \delta_0)}}{\arcsin \sqrt{\delta_0}}$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{U^*}{U} &= \frac{2 - A}{A} + \frac{\sqrt{1 - \delta_0}}{A \arcsin \sqrt{\delta_0}} \frac{Z}{b \eta U} \sqrt{\frac{h_0}{2r}}, \\ \frac{U + U^*}{U} &= \frac{2}{A} + \frac{\sqrt{1 - \delta_0}}{A \arcsin \sqrt{\delta_0}} \frac{Z}{b \eta U} \sqrt{\frac{h_0}{2r}}, \\ \frac{U^* - U}{U} &= 2\frac{1 - A}{A} + \frac{\sqrt{1 - \delta_0}}{A \arcsin \sqrt{\delta_0}} \frac{Z}{b \eta U} \sqrt{\frac{h_0}{2r}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Demnach beträgt die Schichthöhe auf der überrollten Fahrbahn

$$\bar{h} = \frac{Q}{b\,U} = \frac{U + U^*}{U}\,\frac{h^*}{2} = h_0\,\frac{h^*}{2\,h_1}\,(1-\delta_0)\left(\frac{2}{A} + \frac{\sqrt{1-\delta_0}}{A \arcsin\sqrt{\delta_0}}\,\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}\right),$$

so daß wir für die Spurziffer

$$\bar{\delta}_0 = 1 - \frac{h^*}{2\,h_0}\left(\frac{2}{A} + \frac{\sqrt{1-\delta_0}}{A \arcsin\sqrt{\delta_0}}\,\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}\right) = 1 - \frac{h^*}{2\,h_0}\left(\frac{U^*}{U} + 1\right) \tag{16}$$

erhalten.

Tabelle 4a. $\frac{U^*}{U}$

$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$ / δ_0	−5,0	−2,0	−1,0	−0,5	−0,2	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
0,000					− ∞	1,000	∞				
0,025				−3,010	−0,244	1,000					
0,05				−1,161	+0,136	1,001					
0,10				−0,473	0,414	1,006	1,597				
0,15			−1,320	−0,153	0,547	1,014	1,480				
0,20			−0,928	+0,049	0,635	1,025	1,416				
0,25			−0,647	0,197	0,704	1,042	1,379	1,886			
0,30			−0,426	0,319	0,765	1,063	1,361	1,808			
0,35		−1,572	−0,240	0,425	0,825	1,091	1,357	1,757	2,423		
0,40		−1,279	−0,076	0,525	0,886	1,127	1,367	1,728	2,330		
0,45		−1,019	+0,077	0,624	0,953	1,172	1,391	1,719	2,267		
0,50		−0,778	0,225	0,727	1,028	1,228	1,429	1,730	2,231	3,234	
0,55		−0,547	0,377	0,838	1,115	1,300	1,485	1,762	2,223	3,146	
0,60		−0,316	0,538	0,964	1,220	1,391	1,562	1,817	2,244	3,098	
0,65		−0,074	0,717	1,113	1,350	1,509	1,667	1,904	2,300	3,091	
0,70	−2,016	+0,192	0,928	1,296	1,517	1,664	1,811	2,032	2,400	3,136	5,344
0,75	−1,557	0,502	1,189	1,532	1,738	1,875	2,013	2,219	2,562	3,248	5,308
0,80	−1,031	0,894	1,535	1,856	2,049	2,177	2,305	2,498	2,819	3,460	5,385
0,85	−0,364	1,439	2,040	2,341	2,521	2,641	2,761	2,942	3,242	3,843	5,646
0,90	+0,636	2,328	2,893	3,175	3,344	3,457	3,570	3,739	4,021	4,585	6,278
0,95	+2,731	4,323	4,854	5,119	5,278	5,384	5,491	5,650	5,915	6,446	8,037
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Tabelle 4b. $\bar{\delta}_0$

$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$ / δ_0	−5,0	−2,0	−1,0	−0,5	−0,2	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
0,000					∞	0,000	− ∞				
0,025				1,988	0,628	0,017					
0,05				1,078	0,451	0,033					
0,10				0,755	0,342	0,067	−0,208				
0,15			1,143	0,622	0,309	0,100	−0,108				
0,20			0,969	0,552	0,301	0,134	−0,033				
0,25			0,856	0,512	0,305	0,168	+0,030	−0,177			
0,30			0,778	0,490	0,317	0,202	0,086	−0,086			
0,35		1,209	0,723	0,479	0,333	0,236	0,139	−0,007	−0,253		
0,40		1,096	0,683	0,477	0,353	0,271	0,188	+0,065	−0,141		
0,45		1,006	0,656	0,481	0,376	0,306	0,236	0,131	−0,043		
0,50		0,934	0,638	0,490	0,402	0,342	0,283	0,194	+0,046	−0,249	
0,55		0,878	0,629	0,504	0,429	0,380	0,330	0,255	0,130	−0,119	
0,60		0,833	0,626	0,522	0,459	0,418	0,376	0,314	0,210	+0,002	
0,65		0,800	0,629	0,543	0,492	0,457	0,423	0,372	0,286	0,115	
0,70	1,191	0,776	0,637	0,568	0,527	0,499	0,471	0,430	0,360	0,222	−0,193
0,75	1,088	0,761	0,652	0,598	0,565	0,543	0,521	0,489	0,434	0,325	−0,002
0,80	1,004	0,756	0,674	0,632	0,607	0,591	0,574	0,550	0,508	0,426	+0,178
0,85	0,938	0,762	0,703	0,674	0,656	0,644	0,632	0,615	0,585	0,527	0,351
0,90	0,892	0,781	0,744	0,725	0,714	0,707	0,699	0,688	0,670	0,632	0,521
0,95	0,876	0,823	0,806	0,797	0,792	0,788	0,785	0,779	0,771	0,753	0,700
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Mit den in den Tabellen 4a und b gegebenen Werten sind in Abb. 8 die Bildkurven von U^*/U und δ_0 für die Parameterwerte

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}} = 0.0, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1.0, \pm 2.0, \pm 5.0$$

im Intervall $0 \leqq \delta_0 \leqq 1$ gezeichnet. Daraus geht hervor, daß zwei verschiedene Fälle vorliegen, je nachdem, ob die Kraft Z entgegengesetzt ($Z > 0$) oder gleichgerichtet ($Z < 0$) der Fahrgeschwindigkeit U ist.

a) Fall $Z \geqq 0$. Im Gegensatz zum bereits behandelten gezogenen Rad ist für das getriebene Rad $U^* \geqq U$. Die Spurziffer $\bar{\delta}_0$ kann niemals negativ sein; denn $\bar{h} > h_0$ würde bedeuten, daß durch das Überrollen eine Schichterhöhung am Radauslauf auftreten würde. Durch die physikalisch notwendige Forderung $\bar{\delta}_0 \geqq 0$ wird der Eingriffzifferbereich demnach eingeschränkt, und zwar um so mehr, je größer der Parameterwert

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$$

ist. Man erhält somit die Gültigkeitsbereiche

$0 \leqq \delta_0 \leqq 1$ für $Z = 0$,

$0{,}225 \leqq \delta_0 \leqq 1$

für $Z = 0{,}2\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2\,r}{h_0}}$,

$0{,}355 \leqq \delta_0 \leqq 1$

für $Z = 0{,}5\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2\,r}{h_0}}$,

$0{,}475 \leqq \delta_0 \leqq 1$

für $Z = 1{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2\,r}{h_0}}$,

$0{,}600 \leqq \delta_0 \leqq 1$

für $Z = 2{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2\,r}{h_0}}$,

$0{,}750 \leqq \delta_0 \leqq 1$

für $Z = 5{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2\,r}{h_0}}$.

Die Spurziffer $\bar{\delta}_0$ ist immer kleiner als die Eingriffziffer δ_0. Am linken Rand jedes Bereiches wird sie gleich Null, d. h., das getriebene Rad hinterläßt keine Spur. Am rechten Rand $\delta_0 = 1$ wird sie in allen Fällen

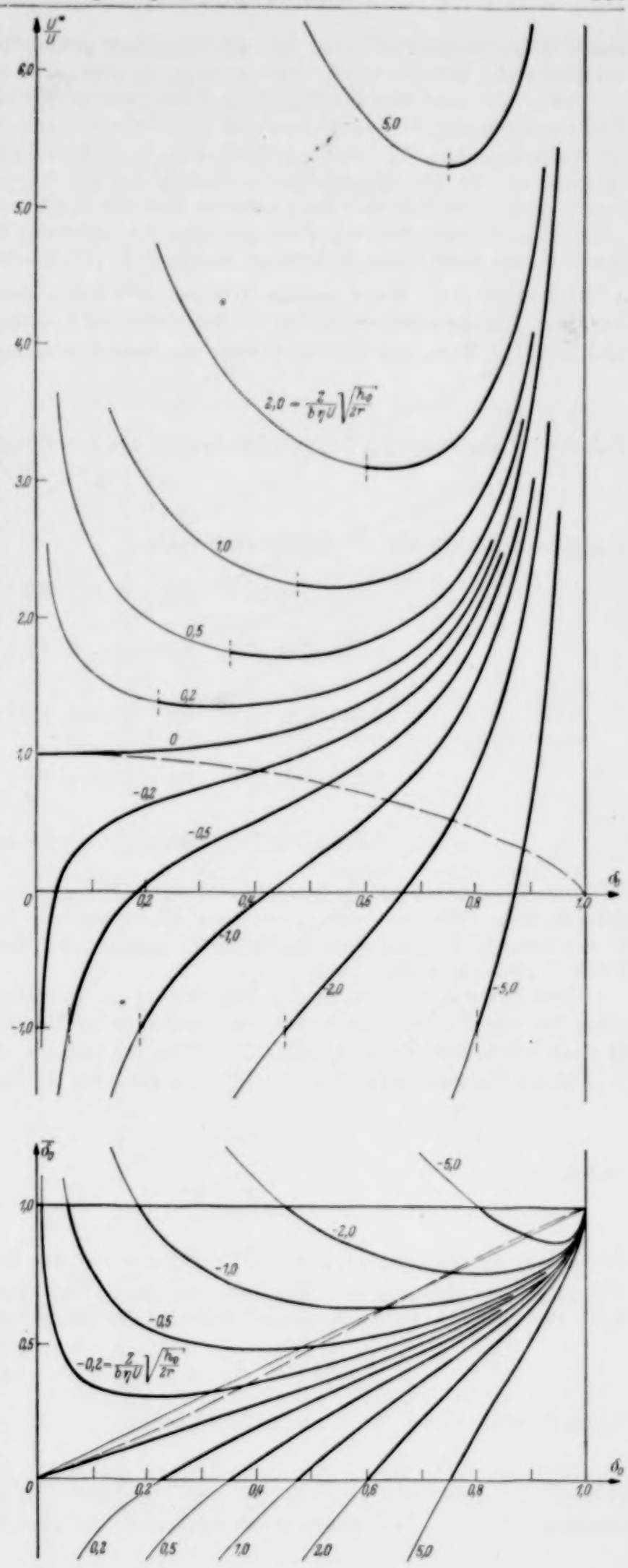

Abb. 8. U^*/U und $\bar{\delta}_0$ für das getriebene Rad.

gleich Eins. Dieser Fall kann nur bei unendlich großer Normalbelastung des Rades erreicht werden; er ist also als mechanisch nicht realisierbar auszuschließen.

Weiter erkennen wir aus Abb. 8, daß bei konstanter Fahrgeschwindigkeit U das getriebene Rad nur dann eine bestimmte Zugkraft Z aufbringen kann, wenn seine Umfangsgeschwindigkeit U^* Werte annimmt, die den Eingriffziffern des zu $(Z/b\,\eta\,U)\sqrt{h_0/2r}$ gehörigen Gültigkeitsintervalles entsprechen. Da die Eingriffziffer wesentlich von der Normalbelastung des Rades abhängt, ist bereits jetzt ersichtlich, daß das getriebene Rad nur dann eine bestimmte Zugkraft ausüben kann, wenn seine Normalbelastung einen gewissen Kleinstbetrag überschreitet. Das dafür aufzubringende U^* ist dann, wenn δ_0 festliegt, aus den (U^*/U)-Kurven zu ermitteln.

b) Fall $Z < 0$. Wenn auf das Triebrad eine Kraft $Z<0$ in der Bewegungsrichtung wirkt, kann die Umfangsgeschwindigkeit U^* des Rades bei konstanter Fahrgeschwindigkeit U positive und negative Werte annehmen. Da für die Spurziffer immer $\bar{\delta}_0<1$ gelten muß, folgt aus (16)

$$\frac{U^*}{U} > -1\,.$$

Daher wird auch hier der Eingriffzifferbereich für den Parameterwert

$$\frac{|Z|}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

abgegrenzt. Man erhält die Gültigkeitsbereiche

$$0{,}010 \leqq \delta_0 \leqq 1 \quad \text{für} \quad Z = -0{,}2\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2r}{h_0}},$$

$$0{,}060 \leqq \delta_0 \leqq 1 \quad \text{für} \quad Z = -0{,}5\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2r}{h_0}},$$

$$0{,}190 \leqq \delta_0 \leqq 1 \quad \text{für} \quad Z = -1{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2r}{h_0}},$$

$$0{,}455 \leqq \delta_0 \leqq 1 \quad \text{für} \quad Z = -2{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2r}{h_0}},$$

$$0{,}805 \leqq \delta_0 \leqq 1 \quad \text{für} \quad Z = -5{,}0\,b\,\eta\,U\sqrt{\frac{2r}{h_0}}.$$

In diesen Bereichen kann die Spurziffer $\bar{\delta}_0$, wie Abb. 8 zeigt, gegebenenfalls größer als die Eingriffziffer δ_0 sein. Dies tritt vor allem dann ein, wenn zur Aufrechterhaltung der Rollbewegung $U =$ konst. die Umfangsgeschwindigkeit U^* negativ, das Rad also wegen der stark schiebenden Kraft Z gebremst werden muß.

Einen tieferen Einblick in den Rollvorgang des getriebenen Rades erhalten wir erst dann, wenn wir die Normalkomponente der resultierenden Druckkraft und das Rollreibungsmoment in ihrer Abhängigkeit von δ_0 und $(Z/b\,\eta\,U)\sqrt{h_0/2r}$ genauer untersuchen.

Für die Normalkomponente $N = P\cos\bar{\alpha}$ gilt nach (9) die Beziehung

$$\frac{N}{b\,\eta\,U} = 3\,\frac{U+U^*}{U}\,\frac{2r}{h_0}\,\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1-\frac{h^*}{2\,h_1}\,(2-\delta_0)\right]-\frac{U^*-U}{U}\ln(1-\delta_0)\,.$$

Dabei sind

$$\frac{U+U^*}{U} \quad \text{und} \quad \frac{U^*-U}{U}$$

durch (15) zu ersetzen, so daß die linke Seite von der Eingriffziffer δ_0 und dem Parameter $(Z/b\,\eta\,U)\sqrt{h_0/2r}$ abhängig ist. Wie beim gezogenen Rad kann für hinreichend kleine Werte von $h_0/2r$ auch hier der zweite Summand unberücksichtigt bleiben, so daß wir aus

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} = 3\,\frac{U^*+U}{U}\,\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1-\frac{h^*}{2\,h_1}\,(2-\delta_0)\right]$$

durch Ersetzen von $\dfrac{U^*+U}{U}$ nach (15) schließlich

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} = \frac{3\,\delta_0}{1-\delta_0}\left[1-\frac{h^*}{2\,h_1}\,(2-\delta_0)\right]\left(\frac{2}{A}+\frac{\sqrt{1-\delta_0}}{A\,\arcsin\sqrt{\delta_0}}\,\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}\right) \tag{17}$$

erhalten.

Für das Reibungsmoment (Rollmoment) ergibt sich aus (9) bei Berücksichtigung von (15)

$$\frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}} = 2\,\frac{U^* - U}{U}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}} - \frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}$$

und schließlich

$$\frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}} = 4\,\frac{1-A}{A}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}} + \frac{2-A}{A}\,\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2\,r}}\,. \tag{18}$$

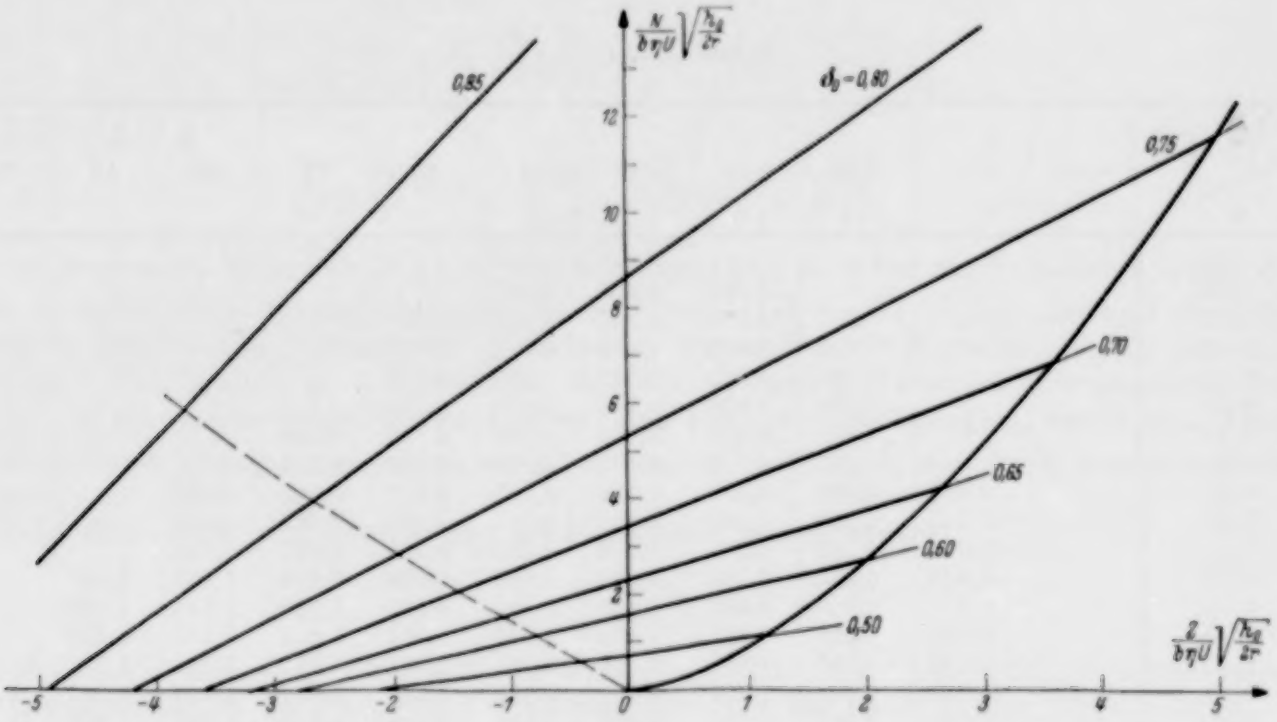

Abb. 9 a.

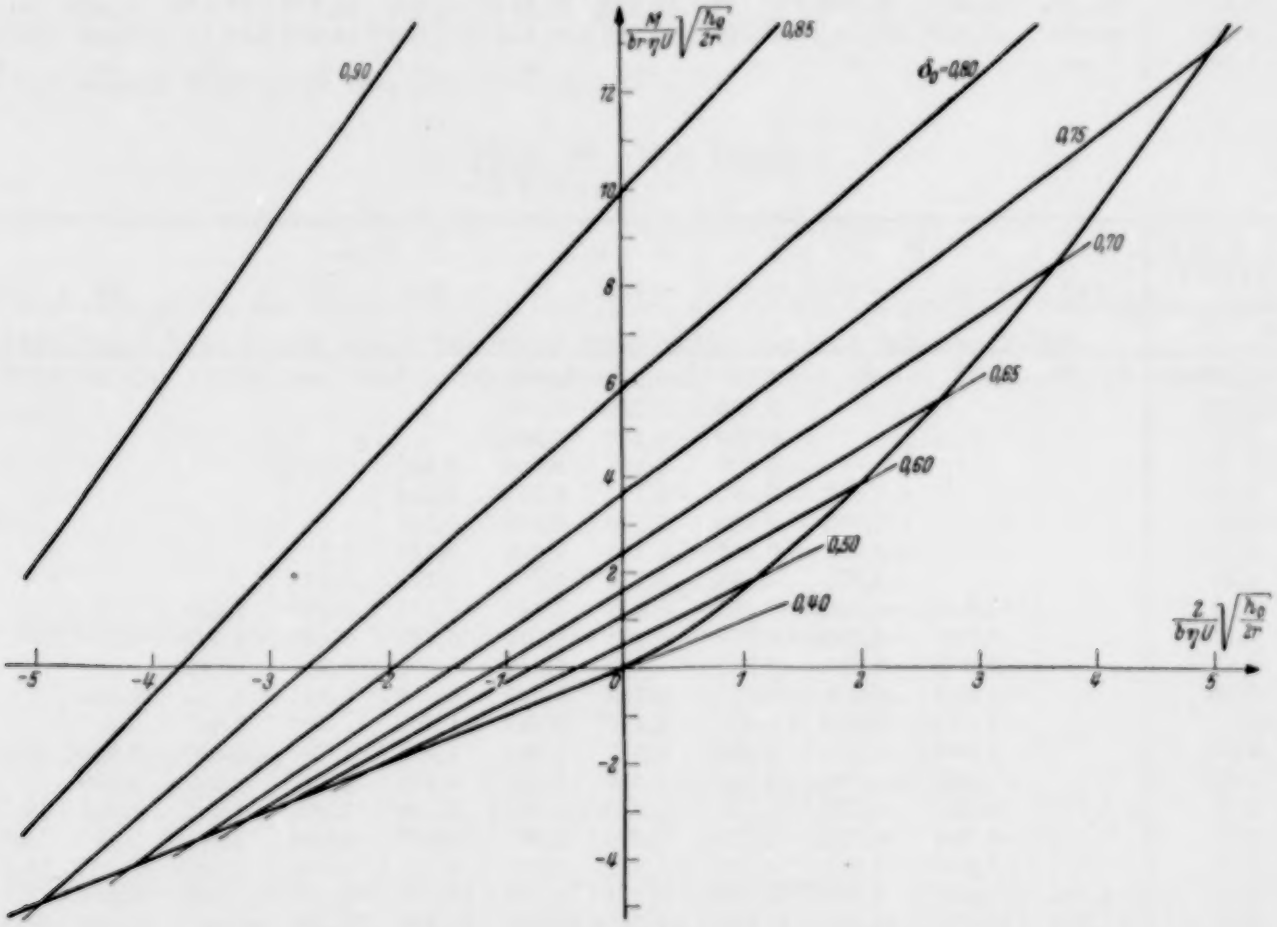

Abb. 9 b.

Abb 9 a, b. Normalbelastung und Reibungsmoment für das getriebene Rad.

Mit den in den Tabellen 5a und b verzeichneten Werten von

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} \quad \text{und} \quad \frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

sind diese in Abb. 9a, b über

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

Tabelle 5a. $\dfrac{N}{b\,\eta\,U}\,\dfrac{h_0}{2r}$

$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$ / δ_0	−5,0	−2,0	−1,0	−0,5	−0,2	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
0,000					0,000	0,000					
0,025				−0,001	0,000	0,001					
0,05				0,000	0,002	0,003					
0,10				0,003	0,008	0,012	0,015				
0,15			−0,005	0,012	0,022	0,029	0,036				
0,20			+0,002	0,029	0,046	0,057	0,068				
0,25			0,017	0,058	0,083	0,099	0,116	0,140			
0,30			0,045	0,102	0,137	0,160	0,183	0,218			
0,35		−0,067	0,089	0,167	0,214	0,245	0,277	0,324	0,402		
0,40		−0,048	0,159	0,262	0,324	0,365	0,406	0,468	0,572		
0,45		−0,005	0,264	0,398	0,479	0,532	0,586	0,667	0,801		
0,50		+0,076	0,422	0,595	0,698	0,767	0,836	0,940	1,113	1,458	
0,55		0,217	0,660	0,881	1,013	1,102	1,190	1,323	1,544	1,987	
0,60		0,455	1,021	1,305	1,475	1,588	1,701	1,871	2,155	2,722	
0,65		0,855	1,585	1,950	2,169	2,315	2,461	2,680	3,045	3,776	
0,70	−1,315	1,542	2,495	2,971	3,257	3,448	3,638	3,924	4,400	5,353	8,210
0,75	−1,029	2,778	4,047	4,681	5,062	5,316	5,569	5,950	6,585	7,854	11,661
0,80	−0,085	5,166	6,917	7,792	8,317	8,667	9,017	9,542	10,418	12,168	17,420
0,85	+2,711	10,400	12,963	14,244	15,013	15,525	16,038	16,807	18,088	20,651	28,340
0,90	12,192	24,805	29,009	31,112	32,373	33,214	34,055	35,316	37,418	41,623	54,236
0,95	64,496	92,010	101,181	105,766	108,518	110,352	112,186	114,937	119,523	128,694	156,207
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Tabelle 5b. $\dfrac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\dfrac{h_0}{2r}}$

$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$ / δ_0	−5,0	−2,0	−1,0	−0,5	−0,2	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
0,000					−0,200	0,000					
0,025				−0,500	−0,200	0,000					
0,05				−0,500	−0,200	0,001					
0,10				−0,499	−0,197	0,004	0,205				
0,15			−1,002	−0,495	−0,191	0,012	0,214				
0,20			−0,999	−0,486	−0,179	0,026	0,231				
0,25			−0,991	−0,470	−0,158	0,050	0,259	0,571			
0,30			−0,976	−0,444	−0,125	0,088	0,300	0,619			
0,35		−2,039	−0,948	−0,402	−0,075	0,143	0,361	0,689	1,234		
0,40		−2,029	−0,903	−0,339	−0,001	0,224	0,449	0,787	1,351		
0,45		−2,003	−0,831	−0,245	+0,106	0,340	0,575	0,926	1,512		
0,50		−1,949	−0,721	−0,107	0,262	0,507	0,753	1,121	1,735	2,964	
0,55		−1,853	−0,553	+0,097	0,487	0,747	1,007	1,397	2,047	3,347	
0,60		−1,686	−0,295	0,400	0,817	1,096	1,374	1,791	2,487	3,878	
0,65		−1,405	+0,104	0,858	1,311	1,613	1,914	2,367	3,121	4,630	
0,70	−5,917	−0,925	0,739	1,571	2,070	2,403	2,736	3,235	4,067	5,731	10,723
0,75	−5,710	−0,084	1,791	2,729	3,292	3,667	4,042	4,604	5,542	7,417	13,043
0,80	−5,057	+1,474	3,651	4,739	5,392	5,828	6,263	6,916	8,005	10,182	16,713
0,85	−3,264	4,659	7,301	8,621	9,414	9,942	10,470	11,262	12,583	15,224	23,147
0,90	+2,124	12,494	15,951	17,680	18,717	19,408	20,099	21,136	22,865	26,322	36,692
0,95	25,834	41,987	47,371	50,064	51,679	52,756	53,833	55,833	58,140	63,525	79,678
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

mit der Eingriffziffer δ_0 als Parameter durch eine Geradenschar dargestellt, die entsprechend der angegebenen Gültigkeitsbereiche jeweils durch eine Kurve abgegrenzt wird. Für $\bar{\delta}_0 = 0$, $Z > 0$ erhalten wir aus (16) für (17) und (18) mit

$$\frac{2\,h_0}{h^*} = \frac{2}{A} + \frac{\sqrt{1-\delta_0}}{A \arcsin\sqrt{\delta_0}} \frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

die Grenzkurven

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\frac{h_0}{2r} = 3\,\frac{\delta_0}{(1-\delta_0)^2}\left[2\left(\frac{h_1}{h^*}-1\right)+\delta_0\right],$$

$$\frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}} = \frac{2 \arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}}\left[\frac{h_0}{h^*}(2-A)-1\right],$$

für $\bar{\delta}_0 = 1$, $Z < 0$

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\frac{h_0}{2r} = 0\,, \quad \frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}} = \frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}\,.$$

Ist ein bestimmter Wert von $(Z/b\,\eta\,U)\sqrt{(h_0/2r)}$ vorgegeben, so liefert die Grenzkurve einmal den Wert von $(N/b\,\eta\,U)\,(h_0/2r)$ und zum anderen den Wert von $(M/b\,r\eta\,U)\sqrt{(h_0/2r)}$, oberhalb derer eine stationäre Rollbewegung möglich ist. Für eine bei vorgegebener Fahrgeschwindigkeit geforderte Zugkraft Z wird dadurch ein Grenzwert für die Normalbelastung N und das aufzubringende Rollmoment M angegeben, dessen Unterschreitung eine stationäre Rollbewegung ausschließt. Damit ist der Zusammenhang zwischen den Größen Z, $h_0/2r$, N, M, δ_0, $\bar{\delta}_0$ und U^*/U ausreichend aufgeklärt.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Fahrwiderstandsparameter

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

für jede Eingriffziffer δ_0 des gezogenen Rades ($Z < 0$), für das $M = 0$ gilt, durch die Schnittpunkte der Geradenschar in der Momentendarstellung von Abb. 9b wiedergegeben wird. Für $M = 0$ in (18) wird nämlich in Übereinstimmung mit (14)

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}} = -4\,\frac{1-A}{2-A}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}}\,,$$

und mit diesem Wert folgt aus (15), (16) und (17)

$$\frac{U^*}{U} = \frac{A}{2-A}\,, \quad \bar{\delta}_0 = 1 - \frac{h^*}{h_1}\,\frac{1-\delta_0}{2-A}\,,$$

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} = \frac{6}{2-A}\,\frac{\delta_0}{1-\delta_0}\left[1 - \frac{h^*}{2\,h_1}(2-\delta_0)\right].$$

Das sind aber gerade die Werte (11), (12) und (13b), die wir für das gezogene Rad erhalten haben. In Abb. 8 und 9 ist dieser Sonderfall durch gestrichelte Kurven gekennzeichnet.

Braucht das getriebene Rad keine Zugkraft aufzubringen (freies Triebrad), ist also $Z = 0$, so wird

$$\frac{U^*}{U} = \frac{2-A}{A}\,, \quad \frac{U+U^*}{U} = \frac{2}{A}\,, \quad \frac{U^*-U}{U} = 2\,\frac{1-A}{A}$$

und

$$\bar{\delta}_0 = 1 - \frac{h^*}{h_0\,A}\,.$$

Für die Normalkomponente $N = P\cos\bar{\alpha}$ gilt dann die Beziehung

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r} = \frac{6\,\delta_0}{A\,(1-\delta_0)}\left[1 - \frac{h^*}{2\,h_1}(2-\delta_0)\right],$$

für das Reibungsmoment

$$\frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}} = 4\,\frac{1-A}{A}\,\frac{\arcsin\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{1-\delta_0}}\,.$$

Bei der numerischen Auswertung berechnet man zuerst

$$\frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

und ermittelt für eine gegebene, der erörterten Beschränkung genügende Belastung N aus

$$\frac{N}{b\,\eta\,U}\,\frac{h_0}{2r}$$

an Hand von Abb. 9a, b die Eingriffziffer δ_0. Darauf bestimmt man aus

$$\frac{M}{b\,r\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}}$$

das Reibungsmoment M. Die Gleichungen (15) und (16) liefern dann die Werte U^*/U und $\bar{\delta}_0$.

Den Beispielen legen wir wieder die Werte $\eta = 0{,}01$ kg s/cm² und $b = 10$ cm zugrunde und schließen sie teilweise an die des gezogenen Rades an.

1. Vorausgesetzt wird $h_0/2r = 0{,}02$, $U = 100$ cm/s. Für die Belastung $N = 300$ kg des gezogenen Rades hatten wir die Zugkraft $Z = 28{,}3$ kg errechnet. Mit den Werten

$$h_0 = 1\text{ cm}, \quad r = 25\text{ cm}, \quad \frac{Z}{b\,\eta\,U}\sqrt{\frac{h_0}{2r}} = 0{,}4$$

erhalten wir folgende Ergebnisse:

N kg	120	225	450	920	1300
δ_0	0,32	0,40	0,50	0,60	0,65
$\bar{\delta}_0$	0,00	0,11	0,22	0,34	0,39
$\frac{U^* - U}{U}$	0,64	0,61	0,63	0,73	0,83
M kgm	9,47	11,95	17,68	29,16	38.89
L PS	0,83	1,02	1,54	2,69	3,79

In der ersten Spalte sind die Minimalwerte von N, M und der Leistung L angegeben, oberhalb derer eine stationäre Rollbewegung möglich ist. Es zeigt sich also, daß eine Belastung des Triebrades von mindestens 120 kg erforderlich ist, wenn eine Zugkraft von 28,3 kg aufgebracht werden soll. Für diesen Grenzwert der Belastung wird die gesamte Schicht überrollt, ohne daß Teile von ihr seitlich abgedrängt werden. Die Spurziffer ist für diesen Grenzfall gleich Null. Die Leistung und die Spurziffer nehmen mit der Belastung zu. Der relative Schlupf $(U^* - U)/U$ hat bei der angenommenen geringen Zähigkeit der Schicht verhältnismäßig hohe Werte. Wir werden im dritten Beispiel den Einfluß größerer Zähigkeitswerte η bzw. größerer Fahrgeschwindigkeit U auf die Rollbewegung erläutern.

2. Vorausgesetzt wird

$U = 100$ cm/s, $N = 450$ kg, $Z = 28{,}3$ kg und $r = 25$ cm.

Wir erhalten für die Schichthöhen $h_0 = 1.00,\ 0.69,\ 0.47,\ 0.31$ cm folgende Ergebnisse:

h_0 cm	1,00	0,69	0,47	0,31
δ_0	0,50	0,45	0,40	0,35
$\bar{\delta}_0$	0,22	0,19	0,16	0,13
$\frac{U^* - U}{U}$	0,63	0,54	0,46	0,39
M kgm	17,68	15,60	13,75	12,20
L PS	1,54	1,28	1,07	0,90

Bei konstantem Raddurchmesser nehmen mit der Schichtdicke Schlupf und Leistung ab.

3. Vorausgesetzt wird

$N = 450$ kg, $Z = 28{,}3$ kg, $h_0 = 1$ cm, $r = 25$ cm.

Damit erhalten wir für $U = 100,\ 150,\ 225,\ 340,\ 535$ cm/s folgende Ergebnisse:

U cm/s	100	150	225	340	535
δ_0	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30
$\bar{\delta}_0$	0,22	0,21	0,20	0,18	0,16
$\frac{U^* - U}{U}$	0,63	0,47	0,34	0,25	0,18
M kgm	17,68	17,37	16,91	16,53	16,08
L PS	1,54	2,04	2,72	3,75	5,39

Mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit U oder zunehmender Zähigkeit η nehmen Eingriffziffer und Schlupf ab, während die Leistung ansteigt.

4. Vorausgesetzt wird

$$Z = 0,\ h_0 = 1\ \text{cm},\ r = 25\ \text{cm},\ U = 600\ \text{cm/s}.$$

Für $N = 300, 480, 735$ kg erhalten wir folgende Ergebnisse:

N kg	300	480	735
δ_0	0,25	0,30	0,35
$\bar{\delta}_0$	0,17	0,20	0,24
$\frac{U^* - U}{U}$	0,04	0,06	0,09
M kgm	4,45	6,68	9,65
L PS	1,48	2,27	3,37

Das freie Triebrad hinterläßt bei größerer Belastung auch eine tiefere Spur. Der Schlupf ist gering. Schlupf und Leistung nehmen mit der Belastung zu.

Herr Dipl.-Math. *W. Müller* hat die numerische und zeichnerische Auswertung durchgeführt. Ihm spreche ich an dieser Stelle meinen Dank aus.

(Eingegangen am 15. Oktober 1956)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *A. Kneschke*, Freiberg (Sachsen), Richard-Wagner-Str. 13.

Ein weiterer Beitrag zur Theorie der Bewegung rollender Fahrzeuge

Von **B. Stückler**

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung und Ergänzung der Arbeiten I[1] und II[2] dar. Vor allem werden die bei einer beliebigen ebenen Bewegung eines rollenden Kraftwagens an den Rädern wirkenden Haftreibungen ermittelt, und zwar in Abhängigkeit von beliebigen äußeren und inneren eingeprägten Kräften und den Massenbeschleunigungen, so weit es unter den zugrundegelegten Voraussetzungen überhaupt möglich ist[3]. Dabei wird der Antrieb vom übrigen Fahrzeug gesondert behandelt (wie in I). Dieses unterscheidet sich von dem in II behandelten Wagen (Fall $\lambda = 0$) hinsichtlich der Kinematik nur im Vorderradsystem. Es brauchen also nur noch diejenigen Massenbeschleunigungsglieder bestimmt zu werden, die bei $\lambda \neq 0$ zu den in II abgeleiteten Beziehungen hinzukommen. Obwohl diese Glieder keine beachtliche Rolle spielen, solange die entsprechenden Trägheitskräfte der Vorderräder verhältnismäßig klein sind, wird die Rechnung zunächst allgemein ohne weitere Vernachlässigungen durchgeführt, um die Leistungsfähigkeit des in II entwickelten Verfahrens zur Bestimmung von Reaktionskräften bei komplizierten Systemen zu demonstrieren. In Ziffer 6 werden dann aber alle Glieder gestrichen, die bei einem normalen Kraftwagen entweder klein im Verhältnis zu immer gleichzeitig auftretenden andren, oder die auch im ungünstigsten Falle nur Trägheitskräfte von einigen Kilogramm ergeben würden.

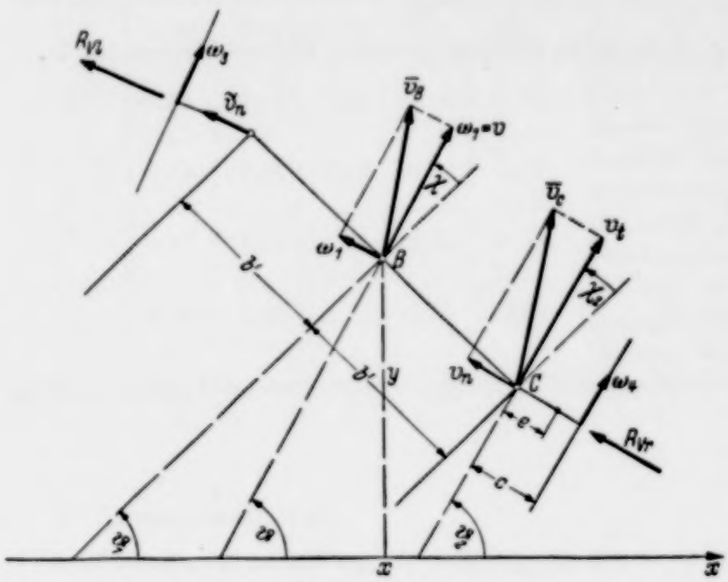

Abb. 1. Bezeichnungen am Vorderradsystem.

Die ganze Rechnung wird mit einer kleinen Modifikation gegenüber I durchgeführt. Es hat sich nämlich als zweckmäßiger erwiesen, den Bezugspunkt B für die Geschwindigkeit v von der Lenkachse des linken Vorderrades[4] genau zwischen beide Lenkachsen zu verlegen (Abb. 1). Das scheint allerdings den Nachteil zu haben, daß die in I angegebenen Rechnungen zur Aufstellung der Differentialgleichungen I (34) für die Bewegung der Fahrzeuge wiederholt werden müßten. Da aber aus ihnen unschwer zu ersehen ist, welche Glieder auf das linke und welche auf das rechte Vorderrad entfallen, lassen sie sich ohne Mühe auf die neu gewählte Lage von B umschreiben. Lediglich zur Kontrolle wurde die Rechnung unabhängig von I mit Hilfe des in II angegebenen Verfahrens noch einmal durchgeführt.

2. Zur Kinematik der Vorderräder. Da sich von den in II gewählten Verschiebungen $\mathfrak{d}s_\mu$ nur $\mathfrak{d}s_3$ und $\mathfrak{d}s_4$ auf Punkte der Vorderräder beziehen, können nur diese im Falle $\lambda \neq 0$ in anderer Weise von den wahren Koordinaten q_ν abhängen als in II. Genau so steht es mit den Geschwindigkeitsgrößen ω_μ, so daß für diese mit Ausnahme von ω_3 und ω_4 die Beziehungen II (21) bis II (24) auch bei $\lambda \neq 0$ gelten. Infolgedessen können sich in der Koeffizienten-Matrix $(b_{\mu\nu})$ II (26) nur die dritte und vierte Zeile ändern und in der reziproken Matrix $(B_{\nu\mu})$ II (27)[5] nur die für $\dot{\varphi}$ bzw. $\dot{\varphi}_2$ geltende fünfte bzw. sechste Zeile. Diese Änderungen sind zunächst zu bestimmen.

Bei einer ganz beliebigen, d. h. auch das Gleiten einschließenden Bewegung des Fahrzeuges auf der Fahrebene, gilt für den Geschwindigkeitsvektor $\bar{v}_C$ der Lenkachse des rechten Vorder-

[1] *B. Stückler*, Ing.-Archiv 20 (1952) S. 337.
[2] *B. Stückler*, Ing.-Archiv 23 (1955) S. 279.
[3] Siehe I, Vorbemerkungen.
[4] Siehe I, Abb. 1.
[5] In II (27) muß es $(B_{\nu\mu})$ statt $(B_{\mu\nu})$ heißen.

rades, wie leicht aus Abb. 1 zu ersehen ist,

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \dot{\bar{\vartheta}}_1 \times \bar{b}' \tag{1}$$

mit $\bar{b}'$ als Vektor von B nach C. Daraus ergeben sich die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} v_t &= \dot{x}\cos\vartheta_2 + \dot{y}\sin\vartheta_2 + b'\,\dot{\vartheta}_1\cos\chi_2\,, \\ v_n &= -\dot{x}\sin\vartheta_2 + \dot{y}\cos\vartheta_2 - b'\,\dot{\vartheta}_1\sin\chi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nach I (8) ist aber

$$\cos\chi_2 = \frac{1}{g}(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\,,\quad g(\lambda,\chi) \equiv +\sqrt{1+\lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\,,\quad \sin\chi_2 = \frac{1}{g}\sin\chi\,, \tag{3}$$

so daß aus (2) wird

$$\left.\begin{aligned} v_t &= \frac{1}{g}\left[(\cos\vartheta + \lambda\cos\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{x} + (\sin\vartheta + \lambda\sin\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{y} + l\lambda\,(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\,\dot{\vartheta}_1\right], \\ v_n &= \frac{1}{g}\left[-(\sin\vartheta + \lambda\sin\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{x} + (\cos\vartheta + \lambda\cos\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{y} - l\lambda\sin\chi\,\dot{\vartheta}_1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Umrechnung auf die Geschwindigkeitsgrößen ω_μ ergibt mit Hilfe der drei ersten Zeilen von II (27)

$$v_t = g'(\chi)\,\omega_1 - \frac{\lambda}{g}(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\,\omega_2 + g\,\omega_7\,,\quad g'(\chi) \equiv \frac{dg}{d\chi}, \tag{5}$$

$$v_n = \frac{1}{g}(\omega_1 + \lambda\sin\chi\,\omega_2)\,. \tag{6}$$

Nun gilt für die Geschwindigkeit ω_4 des Berührungspunktes mit der Fahrebene (siehe Abb. 1)

$$\omega_4 = v_t + c\,\dot{\vartheta}_2 - r\,\dot{\varphi}_2\,,\quad \dot{\vartheta}_2 = \dot{\vartheta}_1 + \dot{\chi}_2\,, \tag{7}$$

also nach (4) und I (10f)

$$\begin{aligned} \omega_4 = {} & \frac{1}{g}(\cos\vartheta + \lambda\cos\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{x} + \frac{1}{g}(\sin\vartheta + \lambda\sin\vartheta_1\sin\chi)\,\dot{y} \\ & + \left[c + \frac{l\lambda}{g}(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\right]\dot{\vartheta}_1 + \frac{c}{g^2}\,\dot{\chi} - r\,\dot{\varphi}_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich die entsprechende Geschwindigkeit ω_3 am linken Rade einfach dadurch, daß λ durch $-\lambda$ ersetzt wird, c durch $-c$, $\dot{\varphi}_2$ durch $\dot{\varphi}$ und g durch

$$\tilde{g} \equiv g(-\lambda,\chi) \equiv +\sqrt{1-\lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\,.$$

Somit sind in II (26) die dritte und vierte Zeile zu ersetzen durch

$$\left.\begin{aligned} (b_{3\nu}) = {} & \left\{\frac{1}{\tilde{g}}(\cos\vartheta - \lambda\cos\vartheta_1\sin\chi);\ \frac{1}{\tilde{g}}(\sin\vartheta - \lambda\sin\vartheta_1\sin\chi);\right. \\ & \left. -c - \frac{l\lambda}{\tilde{g}}(\cos\chi - \lambda\sin\chi);\ -\frac{c}{\tilde{g}^2};\ -r;\ 0;\ 0;\ 0\right\}, \\ (b_{4\nu}) = {} & \left\{\frac{1}{g}(\cos\vartheta + \lambda\cos\vartheta_1\sin\chi);\ \frac{1}{g}(\sin\vartheta + \lambda\sin\vartheta_1\sin\chi);\right. \\ & \left. c + \frac{l\lambda}{g}(\cos\chi + \lambda\sin\chi);\ \frac{c}{g^2};\ 0;\ -r;\ 0;\ 0\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dadurch ergeben sich für II (27) folgende Änderungen:

$$\begin{aligned} (B_{5\mu}) &= \left\{-\frac{c}{rl}\cos\chi + \frac{\tilde{g}'}{r};\ \frac{c}{rl} + \frac{\lambda}{r\tilde{g}}(\cos\chi - \lambda\sin\chi);\ -\frac{1}{r};\ 0;\ 0;\ 0;\ \frac{1}{r}\left(\tilde{g} - \frac{c}{l}\sin\chi\right);\ -\frac{c}{r\tilde{g}^2}\right\}, \\ (B_{6\mu}) &= \left\{\frac{c}{rl}\cos\chi + \frac{g'}{r};\ -\frac{c}{rl} - \frac{\lambda}{rg}(\cos\chi + \lambda\sin\chi);\ 0;\ -\frac{1}{r};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{r}\left(g + \frac{c}{l}\sin\chi\right);\ \frac{c}{rg^2}\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Damit können die $\beta_{\mu\varrho\tau}$ berechnet werden. Die Änderungen gegenüber II (28) lauten:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{137} &= \frac{1}{l\,\bar{g}}\sin\chi\,,\ \beta_{237} = -\frac{\lambda}{l\,\bar{g}}\sin^2\chi\,,\ \beta_{138} = \frac{1}{\bar{g}^3}\,,\ \beta_{238} = -\frac{\lambda}{\bar{g}^3}\sin\chi\,,\\ \beta_{147} &= \frac{1}{l\,g}\sin\chi\,,\ \beta_{247} = \frac{\lambda}{l\,g}\sin^2\chi\,,\ \beta_{148} = \frac{1}{g^3}\,,\ \beta_{248} = \frac{\lambda}{g^3}\sin\chi\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hinzu kommen für die Bewegungsgleichungen

$$\beta_{817} = 1\,,\ \beta_{718} = -1\,.$$

3. Die kinetische Energie der Vorderräder. Auch hier braucht man die Rechnung nur für ein Rad durchzuführen, denn der Anteil des anderen erhält man aus dem Ergebnis durch einfache Vorzeichenänderungen. Für das rechte Rad gilt zunächst (siehe Abb. 1)

$$2\,T_{R2} = m_R\,v_C^2 + A\,\dot{\vartheta}_2^2 + C\,\dot{\varphi}_2^2 + 2\,m_R\,\bar{v}_C\left(\dot{\bar{\vartheta}}_2\times\bar{e}\right), \tag{12}$$

mit $\bar{e}$ als Vektor von C zum Schwerpunkt S des Rades. Ferner gilt, wenn gleich quadratische Glieder mit zwei beim reinen Rollen verschwindenden ω_μ fortgelassen werden,

$$\left.\begin{aligned} v_C^2 &= \omega_7^2 + b'^2\,\dot{\vartheta}_1^2 + 2\,\bar{v}_B\left(\dot{\bar{\vartheta}}_1\times\bar{b}'\right),\\ \bar{v}_B\left(\dot{\bar{\vartheta}}_1\times\bar{b}'\right) &= -\,b'\,\dot{\vartheta}_1\,(\omega_1\sin\chi - \omega_7\cos\chi)\,,\\ \bar{v}_C\left(\dot{\bar{\vartheta}}_2\times\bar{e}\right) &= v_i\,e\,(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\chi}_2) = v_i\,e\left(\dot{\vartheta}_1 + \frac{\omega_8}{g^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dieses und (5) in (12) eingesetzt liefert

$$\left.\begin{aligned} 2\,T_{R2} = {}& m_R\,\omega_7^2 + \frac{A}{g^4}\omega_8^2 + C\,\dot{\varphi}_2^2 + (A + m_R\,b'^2)\,\dot{\vartheta}_1^2 + 2\,\dot{\vartheta}_1\Big[m_R\,(e\,g' - b'\sin\chi)\,\omega_1\\ & - m_R\,e\,\frac{\lambda}{g}\,(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\,\omega_2 + m_R\,(e\,g + b'\cos\chi)\,\omega_7 + \frac{A}{g^2}\,\omega_8\Big]\\ & + 2\,m_R\,\frac{e}{g^2}\left[g'\,\omega_1 - \frac{\lambda}{g}\,(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\,\omega_2 + g\,\omega_7\right]\omega_8\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Hierin sind noch $\dot{\vartheta}_1$ gemäß der dritten Zeile von II (27) und $\dot{\varphi}_2$ nach (10) durch die ω_μ auszudrücken. Mit der Abkürzung

$$m'' \equiv m_R\,\frac{e}{c} + \frac{C}{r^2} \tag{15}$$

ergibt sich, wenn Glieder gestrichen werden, die zusammen mit den entsprechenden des linken Rades Null ergeben,

$$\left.\begin{aligned} T_{R2} = {}& \frac{1}{2}\,\omega_7^2\left[m' + \left(\frac{A'}{l^2} + m'\,\lambda^2\right)\sin^2\chi + \frac{2\,c}{l}\,m''\sin\chi\,g\right] + \frac{A'}{2\,g^4}\,\omega_8^2\\ & + \omega_1\left\{\omega_7\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{l^2} + m'\,\lambda^2\right)\sin 2\chi + \frac{c}{l}\,m''\,(\sin\chi\,g)'\right] + \omega_8\left[\frac{A'}{l\,g^2}\cos\chi + c\,m''\frac{g'}{g^2}\right]\right\}\\ & + \omega_2\left\{\omega_7\left[\left(\frac{A'}{l^2} + m'\,\lambda^2\right)\sin\chi + \frac{c}{l}\,m''\left(2\,g - \frac{2 + \lambda\sin 2\chi}{2\,g}\right)\right]\right.\\ & \left. + \omega_8\left[\frac{A'}{l\,g^2} + c\,\lambda\,\frac{m''}{g^3}\,(\cos\chi + \lambda\sin\chi)\right]\right\}\\ & - \omega_4\,\frac{C}{r^2}\left[\left(g + \frac{c}{l}\sin\chi\right)\omega_7 + \frac{c}{g^2}\,\omega_8\right] + \omega_7\,\omega_8\left[\frac{A'}{l\,g^2}\sin\chi + c\,\frac{m''}{g}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

4. Ermittlung der Reaktionsgrößen λ_μ und der Bewegungsgleichungen. Zunächst sind die Anteile des rechten Rades an den Impulskomponenten P_μ durch Bildung von $\partial T_{R2}/\partial\omega_\mu$ zu bestimmen, woraus sich dann die Anteile des linken Rades wieder einfach durch Ersetzen von λ,

und g durch $-\lambda$, $-c$ und $\bar{g}$ ergeben. Die Rechnung liefert an Stelle von II (32)

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \omega_7\left\{m_{F2}\cos 2\chi + \left(\frac{m_2}{2} + \lambda^2 m'\right)\sin 2\chi + \frac{c}{l}\,m''\,[\sin\chi\,(g-\bar{g})]'\right\}\\
&\quad + \omega_8\left[\frac{A'}{l}\cos\chi\left(\frac{1}{\bar{g}^2}+\frac{1}{g^2}\right) + c\,m''\left(\frac{1}{\bar{g}}-\frac{1}{g}\right)'\right],\\
P_2 &= -\,\omega_7\left\{m_{F2}\cos\chi + (m_3 + 2\lambda^2 m')\sin\chi\right.\\
&\quad \left. + \frac{c}{l}\,m''\left[2\,(g-\bar{g}) + \frac{2-\lambda\sin 2\chi}{2\,\bar{g}} - \frac{2+\lambda\sin 2\chi}{2\,g}\right]\right\}\\
&\quad -\omega_8\left\{\frac{A'}{l}\left(\frac{1}{\bar{g}^2}+\frac{1}{g^2}\right) + c\,\lambda\,m''\left[\frac{1}{g^3}(\cos\chi+\lambda\sin\chi) + \frac{1}{\bar{g}^3}(\cos\chi-\lambda\sin\chi)\right]\right\},\\
P_3 &= -\,\frac{C}{r^2}\left[\left(\bar{g} - \frac{c}{l}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{c}{\bar{g}^2}\,\omega_8\right],\\
P_4 &= -\,\frac{C}{r^2}\left[\left(g + \frac{c}{l}\sin\chi\right)\omega_7 + \frac{c}{g^2}\,\omega_8\right],\\
P_7 &= \omega_7\left[m_1 + m_{F2}\sin 2\chi + (m_2 + 2\lambda^2 m')\sin^2\chi + 2\,\frac{c}{l}\,m''\,(g-\bar{g})\sin\chi\right]\\
&\quad + \omega_8\left[\frac{A'}{l}\sin\chi\left(\frac{1}{\bar{g}^2}+\frac{1}{g^2}\right) + c\,m''\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\bar{g}}\right)\right],\\
P_8 &= \omega_7\left[\frac{A'}{l}\sin\chi\left(\frac{1}{\bar{g}^2}+\frac{1}{g^2}\right) + c\,m''\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\bar{g}}\right)\right] + A'\left(\frac{1}{g^4}+\frac{1}{\bar{g}^4}\right)\omega_8\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Durch Einsetzen von II (28) in II (14) bekommt man unter Beachtung von (11) anstatt II (33)

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= -K_1 + \dot{P}_1 + \frac{\omega_7}{l}\left[P_1\cos\chi + P_2 + \left(\frac{P_3}{\bar{g}} + \frac{P_4}{g} + P_7\right)\sin\chi\right] + \left(\frac{P_3}{\bar{g}^3} + \frac{P_4}{g^3} + P_7\right)\omega_8\,,\\
\lambda_2 &= -K_2 + \dot{P}_2 - \frac{\omega_7}{l}\left[P_1 + P_2\cos\chi + \left(\frac{P_3}{\bar{g}} - \frac{P_4}{g}\right)\lambda\sin^2\chi - (P_5+P_6)\sin\chi\right]\\
&\quad - \lambda\sin\chi\left(\frac{P_3}{\bar{g}^3} - \frac{P_4}{g^3}\right)\omega_8\,,\\
\lambda_3 &= -K_3 + \dot{P}_3\,,\\
\lambda_4 &= -K_4 + \dot{P}_4\,,\\
\lambda_5 &= -K_5 + \dot{P}_5\,,\\
\lambda_6 &= -K_6 + \dot{P}_6
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und für die Bewegungsgleichungen nach II (11)

$$\left.\begin{aligned}
K_7 &= \dot{P}_7 - P_1\,\omega_8\,,\\
K_8 &= \dot{P}_8 - \frac{\partial T_0}{\partial\chi} + P_1\,\omega_7\,.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für die eckigen Klammern in λ_1 und λ_2 ergibt die Rechnung jetzt

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &: \left[m_F\,\frac{l_s}{l} + 2\,m_R + m_R\,\frac{e}{l}\sin\chi\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\bar{g}}\right)\right]\sin\chi\,v + m_R\,e\sin\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\bar{g}^3}\right)\chi\\
&\quad = m\,\frac{l_s^\bullet}{l}\sin\chi\,v + m_R\,e\sin\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\bar{g}^3}\right)\dot{\chi}\,,\\
\lambda_2 &: -\left[m_F\left(1-\frac{l_s}{l}\right)\cos\chi + m_F\,\frac{s}{l}\sin\chi + m_R\,\frac{e}{l}\,\lambda\sin^2\chi\left(\frac{1}{\bar{g}}+\frac{1}{g}\right)\right]\sin\chi\,v\\
&\quad - m_R\,e\,\lambda\sin^2\chi\left(\frac{1}{\bar{g}^3}+\frac{1}{g^3}\right)\dot{\chi} = -\,m\left[\left(1-\frac{l_s^\bullet}{l}\right)\cos\chi + \frac{s^*}{l}\sin\chi\right]\sin\chi\,v\\
&\quad - m_R\,e\,\lambda\sin^2\chi\left(\frac{1}{\bar{g}^3}+\frac{1}{g^3}\right)\dot{\chi}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Auch hier läßt sich zeigen, daß die Glieder mit v nichts anderes als die Komponenten des Impulses $m\,\bar{v}_s^\bullet$ des ganzen Fahrzeuges in ω_2- bzw. ω_1-Richtung sind.

Mit (17), (18) und (20) bekommt man an Stelle von II (36)

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 = &-K_1 + \left\{ m_{F2}\cos 2\chi + \left(\frac{m_2}{2} + \lambda^2 m'\right)\sin 2\chi + \frac{c}{l} m''\left[\sin\chi\,(g-\tilde g)\right]'\right\}\dot v \\
&+ m\,\frac{l_s^{\bullet}}{l^2}\sin\chi\, v^2 + \left[\frac{A'}{l}\cos\chi\left(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\tilde g^2}\right) + c\,m''\left(\frac{1}{\tilde g}-\frac{1}{g}\right)'\right]\ddot\chi \\
&+ \left[m_1 + m_2 + 2\lambda^2 m' - m_{F2}\sin 2\chi - (m_2 + 2\lambda^2 m')\sin^2\chi - \frac{C}{r^2}\left(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\tilde g^2}\right)\right. \\
&\left. + 2\,m_R\,\frac{e}{l}\sin\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\tilde g^3}\right) + 2\,\frac{c}{l}\,m''\cos\chi\,(\tilde g - g)'\right] v\,\dot\chi \\
&+ \left\{\frac{A'}{l}\cos\chi\left(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\tilde g^2}\right)' + m_R\,e\left(\frac{1}{g^5}-\frac{1}{\tilde g^5}\right)\right. \\
&\left. + 2\,c\,m''\lambda^2\left[\sin^2\chi\,(2\cos 2\chi - \lambda^2\sin^2\chi)\left(\frac{1}{g^5}-\frac{1}{\tilde g^5}\right) - \cos 2\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\tilde g^3}\right)\right]\right\}\dot\chi^2, \\
\lambda_2 = &-K_2 - \left\{ m_{F2}\cos\chi + (m_3 + 2\lambda^2 m')\sin\chi + \frac{c}{l}\,m''\left[2\,(g-\tilde g)\right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{2-\lambda\sin 2\chi}{2\,\tilde g} - \frac{2+\lambda\sin 2\chi}{2\,g}\right]\right\}\dot v + \frac{m}{l}\left[\left(1-\frac{l_s^{\bullet}}{l}\right)\cos\chi + \frac{s^{\bullet}}{l}\sin\chi\right]\sin\chi\, v^2 \\
&- \left[\frac{A'}{l}\left(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\tilde g^2}\right) + \lambda\,c\,m''\cos\chi\left(\frac{1}{g^3}+\frac{1}{\tilde g^3}\right) + \lambda^2 c\,m''\sin\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\tilde g^3}\right)\right]\ddot\chi \\
&- \left[(m_3 + 2\lambda^2 m')\cos\chi - m_{F2}\sin\chi + \lambda\,\frac{C}{r^2}\sin\chi\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde g^2}\right)\right. \\
&- 2\,m_R\,\frac{e}{l}\lambda\sin^2\chi\left(\frac{1}{g^3}+\frac{1}{\tilde g^3}\right) + \lambda\,\frac{c\,m''}{l\,g}\,(2 - 3\sin^2\chi + \lambda\sin 2\chi) \\
&\left. + \lambda\,\frac{c\,m''}{l\,\tilde g}\,(2 - 3\sin^2\chi - \lambda\sin 2\chi)\right] v\,\dot\chi \\
&+ \left[-\frac{A'}{l}\left(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\tilde g^2}\right)' + 2\lambda^2 c\,m''\cos\chi\left(\frac{1}{g^3}-\frac{1}{\tilde g^3}\right) + m_R\,e\,\lambda\sin\chi\left(\frac{1}{g^5}+\frac{1}{\tilde g^5}\right)\right. \\
&\left. + 2\lambda^2 c\,m''\sin^2\chi\cos\chi\left(\frac{1}{\tilde g^5}-\frac{1}{\tilde g^5}\right) - 2\lambda^3 c\,m''\sin^3\chi\left(\frac{1}{g^5}+\frac{1}{\tilde g^5}\right)\right]\dot\chi^2, \\
\lambda_3 \equiv R_{vl} = &-K_3 - \frac{C}{r^2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(\tilde g - \frac{c}{l}\sin\chi\right)v - \frac{c}{\tilde g^2}\,\dot\chi\right], \\
\lambda_4 \equiv R_{vr} = &-K_4 - \frac{C}{r^2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(g + \frac{c}{l}\sin\chi\right)v + \frac{c}{g^2}\,\dot\chi\right], \\
\lambda_5 \equiv R_{hl} = &-K_5 - \frac{C_1}{r_1^2}\,\frac{d}{dt}\left(\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right)v, \\
\lambda_6 \equiv R_{hr} = &-K_6 - \frac{C_1}{r_1^2}\,\frac{d}{dt}\left(\cos\chi + \frac{b}{l}\sin\chi\right)v.
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

Im Gegensatz zu II (36) gilt aber im Falle $\lambda \neq 0$ i. a. nicht mehr einfach $\lambda_1 \equiv R_V$ und $\lambda_2 \equiv R_H$, denn nach dem in II über die Reaktionsgrößen λ_μ Gesagtem gilt zunächst für die seitlichen Haftreibungskomponenten (siehe Abb. 1)

$$
\lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2 \equiv R_{Vr}\,v_n + R_{Vl}\,\tilde v_n + R_H\,\omega_2 . \tag{22}
$$

Daraus wird nach (6) und wegen $\tilde v_n = v_n(-\lambda)$

$$
\lambda_1\,\omega_1 + \lambda_2\,\omega_2 \equiv \left(\frac{R_{Vr}}{g} + \frac{R_{Vl}}{\tilde g}\right)\omega_1 + \left[R_H + \lambda\sin\chi\left(\frac{R_{Vr}}{g} - \frac{R_{Vl}}{\tilde g}\right)\right]\omega_2 ,
$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der ω_μ folgt

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &\equiv \frac{R_{Vr}}{g} + \frac{R_{Vl}}{\tilde g}, \\
\lambda_2 &\equiv R_H + \lambda\sin\chi\left(\frac{R_{Vr}}{g} - \frac{R_{Vl}}{\tilde g}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

Daß trotzdem in der Praxis nahezu

$$\lambda_1 = R_{Vr} + R_{Vl}\,, \quad \lambda_2 = R_H$$

ist, wird sich in Ziff. 6 zeigen.

Schließlich ergeben (17) und (19) die zum System (21) gehörenden Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} K_7 = {} & \Big[m_1 + m_{F2}\sin 2\chi + (m_2 + 2\lambda^2 m')\sin^2\chi + 2\frac{c}{l}m''\sin\chi\,(g-\bar g)\Big]\dot v \\ & + \Big[\frac{A'}{l}\sin\chi\Big(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\bar g^2}\Big) + c\,m''\Big(\frac{1}{g}-\frac{1}{\bar g}\Big)\Big]\ddot\chi \\ & + \Big\{m_{F2}\cos 2\chi + \Big(\frac{m_2}{2}+\lambda^2 m'\Big)\sin 2\chi + \frac{c}{l}m''\,[\sin\chi\,(g-\bar g)]'\Big\}\,v\,\dot\chi \\ & + \Big[\frac{A'}{l}\sin\chi\Big(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\bar g^2}\Big)' - 2\,c\,m''\Big(\frac{1}{\bar g}-\frac{1}{g}\Big)'\Big]\dot\chi^2\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} K_8 = {} & \Big[\frac{A'}{l}\sin\chi\Big(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\bar g^2}\Big) + c\,m''\Big(\frac{1}{g}-\frac{1}{\bar g}\Big)\Big]\dot v + A'\Big(\frac{1}{g^4}+\frac{1}{\bar g^4}\Big)\ddot\chi \\ & + \Big[\frac{A'}{l}\cos\chi\Big(\frac{1}{g^2}+\frac{1}{\bar g^2}\Big) + c\,m''\Big(\frac{1}{\bar g}-\frac{1}{g}\Big)'\Big]\,v\,\dot\chi \\ & + A'\lambda\Big[2\cos 2\chi\Big(\frac{1}{\bar g^6}-\frac{1}{g^6}\Big) - \lambda\sin 2\chi\Big(\frac{1}{g^6}+\frac{1}{\bar g^6}\Big)\Big]\dot\chi^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

5. Der Antrieb. Die vorstehenden Ergebnisse sind nun noch zu ergänzen durch diejenigen Massenbeschleunigungen, die bei voll eingekuppeltem Motor infolge Drehung von Motor- und Kraftübertragungsteilen auftreten. Unter den in I, S. 344, angegebenen Voraussetzungen gilt für die Rotationsenergie T_a des Antriebes zunächst

$$2\,T_a = \sum_{\nu=1}^{m} J_\nu\,\dot\psi_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n_1} J_{H\nu}\,\dot\psi_{H\nu}^2 + \sum_{\nu=1}^{n} J_{V\nu}\,\dot\psi_{V\nu}^2\,. \tag{26}$$

Daraus wird nach I (38) und I (43)

$$2\,T_a = J_V\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2)^2 + J_H\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3)^2 + 2\,J_M\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2)\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3)\,. \tag{27}$$

Für die Impulskomponenten $P_{a\mu}$ folgt

$$\left.\begin{aligned} P_{a\mu} \equiv \frac{\partial T_a}{\partial\omega_\mu} = {} & [J_V\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2) + J_M(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3)]\,\frac{\partial}{\partial\omega_\mu}\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2) \\ & + [J_H\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3) + J_M\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2)]\,\frac{\partial}{\partial\omega_\mu}\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Da nach der Differentiation nach ω_μ die für das reine Rollen geltenden Bedingungen $\omega_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots 6)$ eingesetzt werden dürfen, folgt aus (10)

$$r\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2) = (g+\bar g)\,\omega_7 + c\Big(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\bar g^2}\Big)\omega_8 \tag{29}$$

und aus der siebenten und achten Zeile von II (27)

$$r_1\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3) = (2\cos\chi + \tau\sin\chi)\,\omega_7\,, \quad \tau \equiv \frac{b-a}{l}\,. \tag{30}$$

Damit erhält man aus (28), wenn noch die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} H \equiv \frac{J_H}{r_1^2}\,, \quad V \equiv \frac{J_V}{r^2}\,, \quad M \equiv \frac{J_M}{r\,r_1}\,, \\ D \equiv V\,(g+\bar g) + M\,(2\cos\chi + \tau\sin\chi)\,, \\ E \equiv M\,(g+\bar g) + H(2\cos\chi + \tau\sin\chi) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

eingeführt werden,

$$
\left.\begin{aligned}
P_{a1} &= [D\,(g+\tilde{g})' + E\,(\tau\cos\chi - 2\sin\chi)]\,\omega_7 + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)[V\,(g+\tilde{g})' \\
&\quad + M\,(\tau\cos\chi - 2\sin\chi)]\,\omega_8\,, \\
P_{a2} &= -\left[D\lambda\cos\chi\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\tilde{g}}\right) + D\lambda^2\sin\chi\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{\tilde{g}}\right) + E\,\tau\right]\omega_7 \\
&\quad - c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\left[V\,\lambda\cos\chi\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\tilde{g}}\right) + V\,\lambda^2\sin\chi\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{\tilde{g}}\right) + M\,\tau\right]\omega_8\,, \\
P_{a3} &= P_{a4} = -D\omega_7 + V\,c\left(\frac{1}{\tilde{g}^2}-\frac{1}{g^2}\right)\omega_8\,, \\
P_{a5} &= P_{a6} = -E\,\omega_7 + M\,c\left(\frac{1}{\tilde{g}^2}-\frac{1}{g^2}\right)\omega_8\,, \\
P_{a7} &= [D\,(g+\tilde{g}) + E\,(2\cos\chi + \tau\sin\chi)]\,\omega_7 \\
&\quad + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)[V\,(g+\tilde{g}) + M\,(2\cos\chi + \tau\sin\chi)]\,\omega_8, \\
P_{a8} &= Dc\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\omega_7 + V\,c^2\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)^2\omega_8\,.
\end{aligned}\right\} \tag{32}
$$

Diese Impulskomponenten treten bei voll eingekuppeltem Motor auf den rechten Seiten von (17) additiv hinzu. Es zeigt sich, daß der Antrieb keinen Beitrag zu den eckigen Klammern von (18) liefert, so daß er nur zu folgenden Zusatzgliedern auf den rechten Seiten von (18) und (19) führt:

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_{a1} &\equiv \dot{P}_{a1} + \left(\frac{P_{a3}}{\tilde{g}^3} + \frac{P_{a4}}{g^3} + P_{a7}\right)\omega_8\,, \\
\lambda_{a2} &\equiv \dot{P}_{a2} - \lambda\sin\chi\left(\frac{P_{a3}}{\tilde{g}^3} - \frac{P_{a4}}{g^3}\right)\omega_8\,, \\
\lambda_{a3} &= \lambda_{a4} \equiv \dot{P}_{a4}\,, \\
\lambda_{a5} &= \lambda_{a6} \equiv \dot{P}_{a6}\,, \\
k_{a7} &\equiv \dot{P}_{a7} - P_{a1}\,\omega_8\,, \\
k_{a8} &\equiv \dot{P}_{a8} - \frac{\partial T_a}{\partial\chi} + P_{a1}\,\omega_7\,.
\end{aligned}\right\} \tag{33}
$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen von (31) und (32) schließlich für den Fall $\tau = 0$, d. h. für $a = b$, was beim Kraftwagen wohl stets gilt,

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_{a1} &\equiv \{-2\,H\sin 2\chi + V\,(g+\tilde{g})\,(g+\tilde{g})' + 2\,M\,[\cos\chi\,(g+\tilde{g})' - \sin\chi\,(g+\tilde{g})]\}\,\dot{v} \\
&\quad + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)[V\,(g+\tilde{g})' - 2\,M\sin\chi]\,\ddot{\chi} \\
&\quad + [4\,H\sin^2\chi + V\,(g+\tilde{g})'^2 - 4\,M\sin\chi\,(g+\tilde{g})']\,v\,\dot{\chi} \\
&\quad + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)'[V\,(g+\tilde{g})' - 2\,M\sin\chi]\,\dot{\chi}^2, \\
\lambda_{a2} &\equiv \lambda\left[\cos\chi\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{\tilde{g}}\right) + \lambda\sin\chi\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{\tilde{g}}\right)\right]\lambda_{a3}\,, \\
\lambda_{a3} &= \lambda_{a4} \equiv -[V\,(g+\tilde{g}) + 2\,M\cos\chi]\,\dot{v} - V\,c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\ddot{\chi} \\
&\quad - [V\,(g+\tilde{g})' - 2\,M\sin\chi]\,v\,\dot{\chi} - V\,c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)'\dot{\chi}^2\,, \\
\lambda_{a5} &= \lambda_{a6} \equiv -[2\,H\cos\chi + M\,(g+\tilde{g})]\,\dot{v} - M\,c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\ddot{\chi} \\
&\quad - [-2\,H\sin\chi + M\,(g+\tilde{g})']\,v\,\dot{\chi} - M\,c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)'\dot{\chi}^2\,,
\end{aligned}\right\} \tag{34}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
k_{a7} &\equiv [4\,H\cos^2\chi + V\,(g+\tilde{g})^2 + 4\,M\cos\chi\,(g+\tilde{g})]\,\dot{v} + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)[V\,(g+\tilde{g}) + 2\,M\cos\chi]\,\ddot{\chi} \\
&\quad + [V\,(g+\tilde{g})\,(g+\tilde{g})' - 2\,H\sin 2\chi - 2\,M\sin\chi\,(g+\tilde{g}) + 2\,M\cos\chi\,(g+\tilde{g})']\,v\,\dot{\chi} \\
&\quad + c\left(\frac{1}{g^2}-\frac{1}{\tilde{g}^2}\right)'[V\,(g+\tilde{g}) + 2\,M\cos\chi]\,\dot{\chi}^2\,,
\end{aligned}\right\} \tag{35}
$$

$$\left.\begin{aligned} k_{a8} \equiv c\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\Big\{&[V(g+\tilde{g}) + 2M\cos\chi]\,\dot{v} + Vc\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{\tilde{g}^2}\right)\ddot{\chi}\\ &+ [V(g+\tilde{g})' - 2M\sin\chi]\,v\,\dot{\chi} + Vc\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{\tilde{g}^2}\right)'\dot{\chi}^2\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Am einfachsten steht es beim Hinterrad-Antrieb, für den V und M durch Null zu ersetzen sind:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{a1} = -2H\sin 2\chi\,\dot{v} + 4H\sin^2\chi\,v\,\dot{\chi} = -4H\sin\chi\,\frac{d}{dt}(v\cos\chi),\\ &\lambda_{a2} = \lambda_{a3} = \lambda_{a4} = 0,\\ &\lambda_{a5} = \lambda_{a6} = -2H\cos\chi\,\dot{v} + 2H\sin\chi\,v\,\dot{\chi} = -2H\,\frac{d}{dt}(v\cos\chi),\\ &k_{a7} = 4H\cos^2\chi\,\dot{v} - 2H\sin 2\chi\,v\,\dot{\chi} = 4H\cos\chi\,\frac{d}{dt}(v\cos\chi),\\ &k_{a8} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Nun ist aber $v\cos\chi$ nichts anderes als die Geschwindigkeit v_1 des auf der Längsachse liegenden Punktes der Hinterradachse, so daß einfach gilt

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{a1} = -4H\sin\chi\,\dot{v}_1,\\ &\lambda_{a5} = \lambda_{a6} = -2H\,\dot{v}_1,\\ &k_{a7} = 4H\cos\chi\,\dot{v}_1. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

6. Näherungsformeln für Kraftwagen üblicher Bauart. Bei solchen Wagen ist λ nie viel größer als 1/4 und $\chi_{max} \approx 30°$. Daher ist

$$\left.\begin{aligned} &g \equiv \sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi} \approx 1 + \frac{\lambda}{2}\sin 2\chi,\\ &\tilde{g} \equiv g(-\lambda) \approx 1 - \frac{\lambda}{2}\sin 2\chi,\\ &\frac{1}{\tilde{g}} \approx g, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

wobei der größte Fehler etwa 0,2% beträgt (bei $\lambda = 1/4$ und $\chi = 30°$). Es kann also näherungsweise gesetzt werden

$$\left.\begin{aligned} &g + \tilde{g} = 2, \qquad \frac{1}{\tilde{g}} + \frac{1}{g} = 2, \qquad (g+\tilde{g})' = 0,\\ &g - \tilde{g} = \lambda\sin 2\chi, \quad \frac{1}{\tilde{g}} - \frac{1}{g} = \lambda\sin 2\chi, \quad \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\tilde{g}}\right)' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Damit ergeben sich schon erhebliche Vereinfachungen. Streicht man außerdem alle Glieder, die entweder klein sind im Verhältnis zu immer gleichzeitig auftretenden anderen oder die — von der Momentengleichung des Vorderradsystems ($\mu = 8$) abgesehen — auch im ungünstigsten Falle nur Trägheitskräfte von wenigen Kilogramm ergeben, so wird man (jedenfalls solange die Verhältnisse nicht wesentlich anders liegen als beim zugrundegelegten Zahlenbeispiel aus I, Seite 348) mit folgenden Näherungsformeln auskommen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \approx\ & -K_1 + \left[m\frac{s^*}{l}\cos 2\chi + \frac{m_2}{2}\sin 2\chi - 4(H\cos\chi + M)\sin\chi\right]\dot{v} + m\frac{l_s^*}{l^2}\sin\chi\,v^2\\ &+ \left[m + m_2 - m\frac{s^*}{l}\sin 2\chi - (m_2 - 4H)\sin^2\chi\right]v\,\dot{\chi},\\ \lambda_2 \approx\ & -K_2 - \left(m\frac{s^*}{l}\cos\chi + m_3\sin\chi\right)\dot{v} + \frac{m}{l}\left[\left(1 - \frac{l_s^*}{l}\right)\cos\chi + \frac{s^*}{l}\sin\chi\right]\sin\chi\,v^2\\ &- \left(m_3\cos\chi - m\frac{s^*}{l}\sin\chi\right)v\,\dot{\chi},\\ \lambda_{a3} \equiv R_{vl} \approx\ & -K_3 - \left(\frac{C}{r^2} + 2V + 2M\cos\chi\right)\dot{v} + \left(\frac{C}{r^2}\lambda\cos 2\chi + 2M\sin\chi\right)v\,\dot{\chi},\\ \lambda_{a4} \equiv R_{vr} \approx\ & -K_4 - \left(\frac{C}{r^2} + 2V + 2M\cos\chi\right)\dot{v} + \left(-\frac{C}{r^2}\lambda\cos 2\chi + 2M\sin\chi\right)v\,\dot{\chi}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{a5} \equiv R_{hl} \approx & -K_5 - \left[\frac{C_1}{r_1^2}\left(\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right) + 2H\cos\chi + 2M\right]\dot{v} \\
& + \left[\frac{C_1}{r_1^2}\left(\frac{a}{l}\cos\chi + \sin\chi\right) + 2H\sin\chi\right] v\dot{\chi}\,, \\
\lambda_{a6} \equiv R_{hr} \approx & -K_6 - \left[\frac{C_1}{r_1^2}\left(\cos\chi + \frac{a}{l}\sin\chi\right) + 2H\cos\chi + 2M\right]\dot{v} \\
& + \left[\frac{C_1}{r_1^2}\left(-\frac{a}{l}\cos\chi + \sin\chi\right) + 2H\sin\chi\right] v\dot{\chi}\,,
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
K_7 \approx & \left[m_1 + m\frac{s^*}{l}\sin 2\chi + m_2\sin^2\chi + 4(V + H\cos^2\chi + 2M\cos\chi)\right]\dot{v} \\
& + \left[m\frac{s^*}{l}\cos 2\chi + \frac{m_2}{2}\sin 2\chi - 4\sin\chi\,(H\cos\chi + M)\right] v\dot{\chi}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned}
K_8 \approx & \left[2\frac{A'}{l}\sin\chi - 4c\lambda\sin 2\chi\left(\frac{m''}{4} + V + M\cos\chi\right)\right]\dot{v} + (2A' + 4Vc^2\lambda^2\sin 2\chi)\ddot{\chi} \\
& + \left[2\frac{A'}{l}\cos\chi + 2m''c\lambda\cos 2\chi + 4Mc\lambda\sin\chi\sin 2\chi\right] v\dot{\chi} \\
& + 2\lambda\sin 2\chi\,[A'\lambda(6\cos 2\chi - 1) + 4Vc^2\lambda\cos 2\chi]\dot{\chi}^2\,.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Diese Formeln gelten, wenn der Motor voll eingekuppelt ist; beim Frontantrieb sind H und M, beim Hinterradantrieb V und M durch Null zu ersetzen. Bei ausgekuppeltem oder nicht ganz eingekuppeltem Motor können H, V und M näherungsweise durch Null ersetzt werden[1]. Bemerkenswert an (41) ist, daß in λ_2 die Massenbeschleunigungen des Antriebes nicht mehr vorkommen und in λ_1 nur bei 4-Rad- oder Hinterrad-Antrieb.

Setzt man ferner (39) in (23) ein, so ergibt sich zunächst

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &\approx R_{Vl} + R_{Vr} + \frac{\lambda}{2}\sin 2\chi\,(R_{Vl} - R_{Vr})\,, \\
\lambda_2 &\approx R_H - \lambda\sin\chi\,(R_{Vl} - R_{Vr}) - \frac{\lambda^2}{2}\sin\chi\sin 2\chi\,(R_{Vl} + R_{Vr})\,.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Nun ist aber für $\lambda = 1/4$ und $\chi_{max} = 30°$

$$\frac{\lambda}{2}\sin 2\chi < 0{,}11\,, \quad \lambda\sin\chi < 0{,}125\,, \quad \frac{\lambda^2}{2}\sin\chi\sin 2\chi < 0{,}014\,,$$

so daß meistens sogar mit

$$\lambda_1 = R_{Vl} + R_{Vr} = R_V\,, \quad \lambda_2 = R_H \tag{45}$$

gerechnet werden kann. Dann können aber die Näherungsformeln für λ_1 und λ_2 in (41) auch als Näherungsformeln für R_V und R_H genommen werden. Diese unterscheiden sich von den für $\lambda = 0$ genau geltenden Formeln für R_V und R_H in II (36) nur dadurch, daß die $\ddot{\chi}$-Glieder beim Kraftwagen wegen Belanglosigkeit fehlen, in $m_{F2}\,a = b$ gesetzt ist und in R_V bei voll eingekuppeltem Motor noch Massenbeschleunigungen des Antriebes in Erscheinung treten. Somit gilt II, Ziff. 5, auch für den Kraftwagen; von den im Zahlenbeispiel untersuchten Gliedern ändert sich bei voll eingekuppeltem Motor lediglich $(R_V)_{\dot{v}}$, und zwar nach der ersten Gleichung von (41) um das Zusatzglied $-4\sin\chi\,(H\cos\chi + M)$. Hierfür bekommt man mit den Zahlenwerten aus I, S. 348, für den Hinterrad-Antrieb

$-5{,}1\sin 2\chi$ im direkten Gang,
$-103\sin 2\chi$ im ersten Gang,

für den 4-Rad-Antrieb

$-2{,}5\sin\chi\,(1 + \cos\chi)$ im direkten Gang,
$-51\sin\chi\,(1 + \cos\chi)$ im ersten Gang.

Ein Vergleich mit II, Ziff. 5, zeigt, daß die Massenbeschleunigungen des Antriebes im ersten Gang vor allem beim Hinterrad-Antrieb einen erheblich größeren Anteil an $(R_V)_{\dot{v}}$ haben als diejenigen

[1] Siehe I, 2 h), letzter Absatz, S. 346.

des ganzen übrigen Fahrzeuges. Allerdings ist zu beachten, daß man über die Abhängigkeit der erforderlichen Haftreibungskraft R_V vom Antrieb erst dann ein richtiges Bild erhalten kann, wenn man auch den auf den Antrieb entfallenden Anteil der eingeprägten Kraftgröße K_1 kennt (siehe hierzu Ziff. 7).

Schließlich sei noch als Ergänzung zu II, Ziff. 5, kurz auf den Einfluß der Schwerpunktlage auf die $v\dot{\chi}$-Glieder in R_V und R_H eingegangen. Diese spielen vor allem beim Hineinfahren in eine Kurve und beim Herausfahren aus ihr eine Rolle. Benutzt man für die betreffenden Koeffizienten in (41) die Näherungsformeln II (46), so ergeben sich die Diagramme der Abb. 2. Aus diesen ist zu ersehen, daß — jedenfalls für das gewählte Zahlenbeispiel — im praktisch interessierenden Bereich $1/4 \leqq l_s{\bullet}/l \leqq 3/4$ die erforderliche Seitenkraft R_V sehr beträchtlich von der Größe des $v\dot{\chi}$-Gliedes abhängen kann; dieses würde beispielsweise für $l_s{\bullet}/l = 1/2$ und $v\dot{\chi} = 5$ m/sec² etwa 350 kg ergeben. Der Antrieb tritt nur in $(R_V)_{v\dot{\chi}}$ in Erscheinung, und auch dann nur beim Hinterrad-Antrieb und praktisch nur im ersten Gang bei größeren χ-Werten.

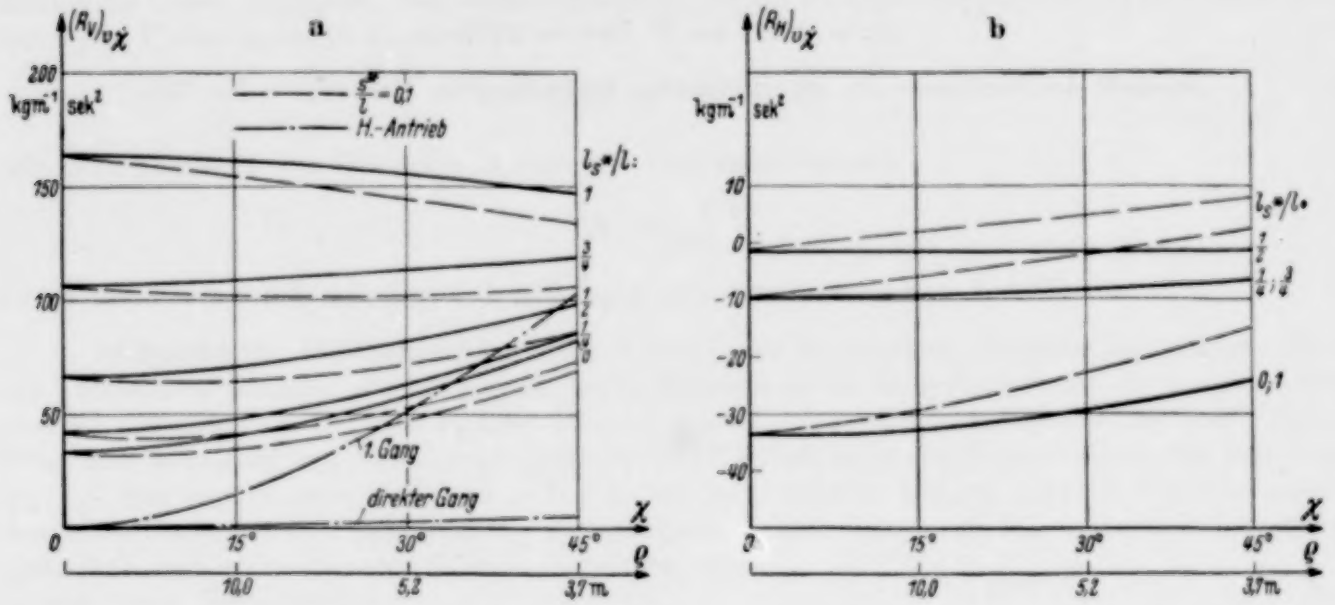

Abb. 2.

7. Über die K_μ der wichtigsten eingeprägten Kräfte. Auch bei $\lambda \neq 0$ gilt für die Schwerkraft II (40) und für den Luftwiderstand II (41), dagegen ergeben auf die Vorderräder wirkende Momente um deren Achsen an Stelle von II (43) wegen (10) folgende Näherungsformeln

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &\approx \frac{\lambda}{r}(M_{vr} - M_{vl})\cos 2\chi + \frac{a}{r_1 l}(M_{hr} - M_{hl})\cos\chi - \frac{1}{r_1}(M_{hr} + M_{hl})\sin\chi\,,\\
K_2 &\approx -\frac{\lambda}{r}(M_{vr} - M_{vl})\cos\chi - \frac{a}{r_1 l}(M_{hr} - M_{hl})\,,\\
K_3 &= -\frac{M_{vl}}{r}, \quad K_4 = -\frac{M_{vr}}{r}, \quad K_5 = -\frac{M_{hl}}{r_1}, \quad K_6 = -\frac{M_{hr}}{r_1},\\
K_7 &\approx \frac{1}{r}(M_{vr} + M_{vl}) + \frac{\lambda}{2r}(M_{vr} - M_{vl})\sin 2\chi + \frac{1}{r_1}(M_{hr} + M_{hl})\cos\chi\\
&\quad + \frac{a}{r_1 l}(M_{hr} - M_{hl})\sin\chi\,,\\
K_8 &\approx \frac{c}{r}[M_{vr} - M_{vl} - \lambda(M_{vr} + M_{vl})\sin 2\chi]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Für den Antrieb gilt zunächst nach I (51)

$$\mathfrak{d}A_e = M_m(\mathfrak{d}\varphi + \mathfrak{d}\varphi_2) + M_{1m}(\mathfrak{d}\varphi_1 + \mathfrak{d}\varphi_3)\,. \tag{47}$$

Dasselbe bekommt man aber auch rein formal, wenn man in II (42) M_{vr} und M_{vl} durch M_m und M_{hr} und M_{hl} durch M_{1m} ersetzt. Daher ergeben sich die Näherungsformeln des Antriebes einfach

aus (46) durch die gleiche Substitution:

$$\left.\begin{aligned} K_{a1} &\approx -2\,\frac{M_{1m}}{r_1}\sin\chi\,,\\ K_{a2} &\approx 0\,,\\ K_{a3} &= K_{a4} = -\frac{M_m}{r}\,,\\ K_{a5} &= K_{a6} = -\frac{M_m}{r_1}\,,\\ K_{a7} &\approx 2\,\frac{M_m}{r} + 2\,\frac{M_{1m}}{r_1}\cos\chi\,,\\ K_{a8} &\approx -2\,\frac{M_m}{r}\,c\,\lambda\sin 2\chi\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

(Eingegangen am 15. Oktober 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *B. Stückler*, Berlin-Steglitz, Mariendorfer Str. 32b.

Einflußflächen einer Dreiecksplatte mit Aufpunkt am freien Rand*

Von A. Scherer

1. Einleitung. Im folgenden sollen singuläre Lösungen der biharmonischen Gleichung hergeleitet und das Verfahren zur Ermittlung von Einflußflächen von *F. Schultz-Grunow*[1] weiter entwickelt werden auf Platten mit teilweise freien und eingespannten Rändern für eine am freien Rand wirkende Last.

Es sei vorausgesetzt, daß der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν konstant seien, daß die Plattendicke h konstant und klein gegen die übrigen Abmessungen sei, der Baustoff homogen und isotrop, die Durchbiegung klein gegenüber der Plattendicke und ferner, daß das *Hooke*sche Gesetz gültig sei. Die Differentialgleichung für die Durchbiegung $w(x,y)$ einer homogenen isotropen Platte lautet in diesem Fall

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{1}{N}\, p(x,y)\,. \tag{1}$$

mit dem *Laplace*schen Operator Δ und der Plattenkonstanten

$$N = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu)^2}$$

sowie der Flächenbelastung $p(x,y)$, abhängig von den kartesischen Koordinaten x, y.

2. Aufpunkt im Plattenbereich. Eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (1) ist die *Green*sche Funktion, die die physikalische Bedeutung der Biegefläche einer in x_0, y_0 angreifenden Einzelkraft vom Betrage P_0 hat. Für die Last $P_0 = 1$ wird diese Biegefläche durch Anwendung des *Maxwell*schen Vertauschungssatzes die Einflußfläche der Durchbiegung für den Punkt (x_0, y_0), den sogenannten Aufpunkt. Die *Green*sche Funktion $G(x_0,y_0; x,y)$ setzt sich zusammen aus einer Summe von Funktionen G_0 mit gewissen Singularitäten (im folgenden kurz Singulärteil genannt) und einer Summe G_1 von regulären Funktionen (kurz Regulärteil):

$$G(x_0, y_0; x, y) = G_0(x_0, y_0; x, y) + G_1(x_0, y_0; x, y)\,. \tag{2}$$

Der Singulärteil G_0 lautet[2] für einen Aufpunkt im Inneren des Bereiches (Abb. 1)

$$G_0(x_0, y_0; x, y) = \frac{P_0}{8\,N\,\pi}\, r^2 \ln r\,. \tag{3}$$

Der Regulärteil $G_1(x_0, y_0; x, y)$ besteht aus einer Summe von Potential- und Bipotentialfunktionen, die mit F_m bezeichnet sind:

$$G_1(x_0, y_0; x, y) = \sum_m C_m\, F_m\,. \tag{4}$$

Die freien Konstanten C_m bestimmen sich aus den Randbedingungen für

$$G(x_0, y_0; x, y)\,.$$

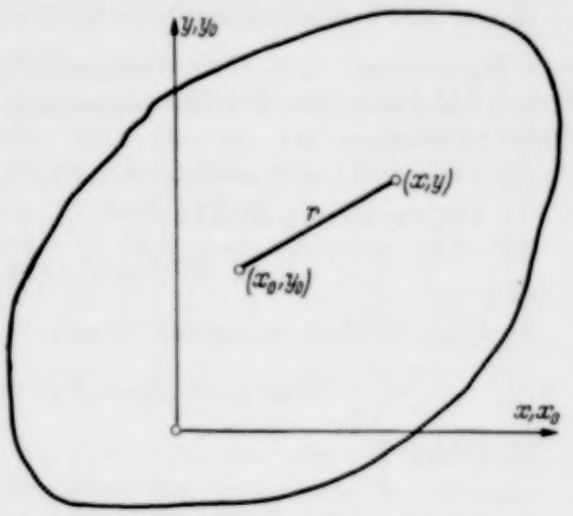

Abb. 1. Aufpunkt und laufende Koordinaten in der Plattenebene.

Neben der Biegeeinflußfläche interessieren auch die Einflußflächen der Schnittmomente und Schnittkräfte. Wie bereits von *Pucher*[3] gezeigt, erhält man die Einflußflächen für die Schnittmomente und Schnittkräfte, indem man die Ableitungen der Biegeeinflußfläche nach den Aufpunktkoordinaten x_0, y_0 in die Ausdrücke für die Schnittgrößen einführt. Die Randbedingungen

---

* Auszug aus der von der Fakultät für allgemeine Wissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigten Dissertation. Referent Professor Dr. *F. Schultz-Grunow*, Korreferent Professor Dr. *F. Reutter*.

[1] *F. Schultz-Grunow*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 227.

[2] *Ph. Frank* und *R. v. Mises*, Differential- und Integralgleichungen für Mechanik und Physik, Bd.I, S. 56 ff. New York 1943.

[3] *A. Pucher*, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten, Berlin 1938.

für diese Einflußflächen bleiben die gleichen wie bei der Biegefläche; sie werden später näher beschrieben.

Nach der Differentiation hat also der Regulärteil wiederum die speziellen Randbedingungen zu erfüllen. Man erhält dann für die Einflußflächen folgende Ausdrücke:

1) Einflußfläche der Durchbiegung:

$$w_0(x_0, y_0; x, y) = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot N} \left[r^2 \ln r + \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x, y)\right]. \tag{5}$$

2) Einflußflächen der Krümmung K_{0x}, K_{0y} bzw. der Biegemomente $M_{0,x}$, $M_{0,y}$:

$$K_{0x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} N = \frac{1}{8\pi}\left[\ln r^2 + \frac{2(x-x_0)^2}{r^2} + 1 + \frac{\partial^2 \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x, y)}{\partial x_0^2}\right], \tag{6a}$$

$$K_{0y} = -\frac{\partial^2 (w_0)}{\partial y_0^2} N = \frac{1}{8\pi}\left[\ln r^2 + \frac{2(y-y_0)^2}{r^2} + 1 + \frac{\partial^2 \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x y)}{\partial y_0^2}\right], \tag{6b}$$

$$M_{0,x} = K_{0x} + \nu K_{0y}, \tag{6c}$$

$$M_{0,y} = K_{0y} + \nu K_{0x}. \tag{6d}$$

3) Einflußfläche des Verdrillungsmomentes M_{0xy}:

$$M_{0xy} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0 \partial y_0} N(1-\nu) = -\frac{(1-\nu)}{8\pi}\left[\frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} + \frac{\partial^2 \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x, y)}{\partial x_0 \partial y_0}\right]. \tag{7}$$

4) Einflußflächen der Querkräfte:

$$Q_{0x} = -\frac{\partial \Delta_0 w_0}{\partial x_0} N = -\frac{1}{8\pi}\left[\frac{4(x-x_0)}{r^2} + \frac{\partial \Delta_0 \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x y)}{\partial x_0}\right], \tag{8a}$$

$$Q_{0y} = -\frac{\partial \Delta_0 w_0}{\partial y_0} N = -\frac{1}{8\pi}\left[\frac{4(y-y_0)}{r^2} + \frac{\partial \Delta_0 \sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x, y)}{\partial y_0}\right], \tag{8b}$$

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2}.$$

Da in den Ausdrücken (6) bis (8) die Ableitungen von $\sum_m C_m F_m(x_0, y_0; x, y)$ lediglich eine Summe von Bipotential- und Potentialfunktionen bedeuten, kann man für alle Einflußflächen anstatt dieser Ableitung die Funktionssummen selbst verwenden, wobei nur die Konstanten C_m andere Werte annehmen.

Je nach der Lagerungsart der Platte treten nun folgende Randbedingungen auf:

1) Eingespannter Rand:

$$w_0 = G(x_0, y_0; x, y) = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial G(x_0, y_0; x, y)}{\partial n} = 0. \tag{9}$$

2) Frei drehbar gelagerter Rand:

$$w_0 = G(x_0, y_0; x, y) = 0, \quad M_{0n} = \frac{\partial^2 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

3) Freier Rand:

$$\left.\begin{aligned} M_{0n} &= \frac{\partial^2 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial t^2} = 0, \\ C_{0n} &= \frac{\partial^3 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial n^3} + (2-\nu) \cdot \frac{\partial^3 G(x_0, y_0; x, y)}{\partial n \, \partial t^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Darin bedeuten n die äußeren Normalen-, t die Tangentenrichtung am Rande, M_{0n} das Stützmoment und C_{0n} die Stützkraft.

3. Aufpunkt am freien Rand. Besitzt die Platte einen freien Rand, so sind die Einflußflächen der Durchbiegung und der Schnittgrößen für einen Aufpunkt an dem freien Rand von Interesse. Ein analytischer Ausdruck für den Singulärteil einer Biegefläche mit dem Aufpunkt auf dem freien geradlinigen Rand wird von *A. Nadai*[1] in Polarkoordinaten angegeben:

$$w_0 = \frac{P_0}{2(3+\nu)\pi N}\left[r^2 \ln r + \frac{1+\nu}{1-\nu}(r^2 \varphi \sin 2\varphi - r^2 \cos 2\varphi \ln r) + \frac{r^2}{1+\nu}\right]. \tag{12}$$

[1] *A. Nadai*, Elastische Platten, S. 39, S. 206. Berlin 1925.

Es gelten hier folgende Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten:

$$x^2 + y^2 = r^2\,, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Die Einzelkraft liegt im Aufpunkt $x_0 = 0, y_0 = 0$. Die y-Achse liegt hier in der freien Begrenzungsgeraden und die Platte in der Umgebung des Aufpunktes auf der Seite $x > 0$ (Abb. 2). In Fortführung der Arbeit von *A. Pucher*[1], der die Herleitung der Singulärteile für einen freien Plattenrand ankündigte, wurde diese dann von *W. Dworzak*[2] angegeben. Er führte in (12) kartesische Koordinaten ein und, um die Einflußflächen der Schnittkräfte zu erhalten, die Aufpunktkoordinate y_0.

Dabei wurde die Behauptung aufgestellt, daß der Aufpunkt an den freien Rand gebunden sei, infolgedessen eine Aufpunktkoordinate x_0 nicht existiere und auch nicht nach ihr differentiert werden könne. Eine solche Auffassung ist abzulehnen, da selbstverständlich die Last auch in x-Richtung, also in den Innenbereich der Platte gerückt werden kann. Es wäre sonst ja auch nicht möglich, die Einflußflächen für die Schnittkräfte zu erhalten, bei denen eine Differentiation nach x_0 in jedem Fall erforderlich ist. Weiter wurde von *Dworzak* von vornherein in (12) die Querkonstraktionszahl $\nu = 0$ gesetzt, welche Spezialisierung erst nach der Differentation gemacht werden dürfte.

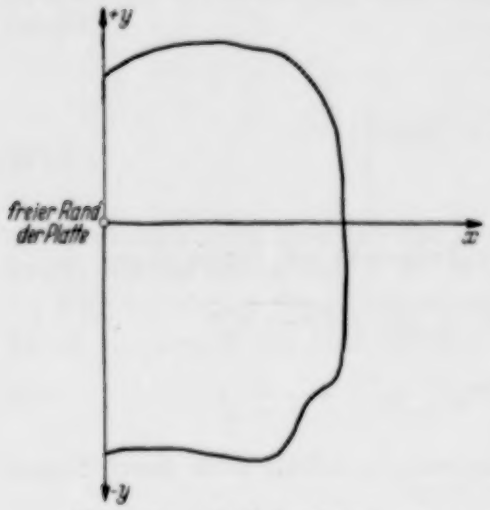

Abb. 2. Lage des freien Plattenrandes.

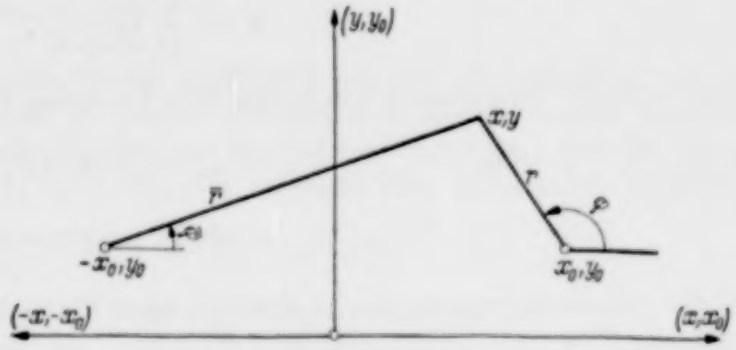

Abb. 3. Veranschaulichung von F.

Es wird daher von der Überlegung ausgegangen, daß die Potentialfunktion

$$F_1 = r^2\,(\varphi \sin 2\,\varphi - \cos 2\,\varphi \ln r)\,, \tag{13}$$

welche in (12) auftritt, die Aufgabe hat, die in den Randbedingungen des freien Randes im Aufpunkt auftretende Singularität von $r^2 \ln r$ auszugleichen; (13) muß also im Aufpunkt ebenfalls Singularitäten besitzen; bei seinem Verschieben ins Platteninnere muß diese Funktion (13) aber im ganzen Bereich einschließlich des Randes einen regulären Verlauf haben.

Stellt man diesen Sachverhalt in Koordinaten dar, so ist statt F_1 in (13) zu schreiben (Abb. 3)

$$F_2 = \bar{r}^2\,(\bar{\varphi} \sin 2\,\bar{\varphi} - \cos 2\,\bar{\varphi} \ln \bar{r})\,. \tag{13a}$$

In kartesischen Koordinaten lautet (13a) (Abb. 3)

$$F_2 = (x + x_0)^2 - (y - y_0)^2]\ln\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2} - 2\,(x + x_0)(y - y_0)\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x + x_0}\,. \tag{14}$$

Der Ausdruck (14) ist in dem Punkt der Zahlenebene $x = -x_0$, $y = +y_0$, der nur auf dem freien Rand oder, wenn der Aufpunkt vom freien Rande wegrückt, aber nur außerhalb des Plattenbereiches liegen kann, singulär und hat dort die physikalische Bedeutung einer Scherkraft[3].

Der Singulärteil $\bar{G}_0(x_0, y_0; x, y)$ der *Green*schen Funktion für einen Aufpunkt am freien Rand längs der Achse $y = 0$ läßt sich nun also schreiben

$$\bar{G}_0(x_0, y_0; x, y) = \frac{\bar{A}}{N}\left[r^2 \ln r - \frac{1+\nu}{1-\nu}\left\{[(x + x_0)^2 - (y - y_0)^2]\ln\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2} - 2\,(x + x_0)\,(y - y_0)\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x + x_0}\right\} + \frac{r^2}{1+\nu}\right]. \tag{15}$$

Um den Faktor $\bar{A}$ zu berechnen, stellt man sich vor, daß an den freien Plattenrand eine symmetrische Platte angelegt wird, so daß der freie Rand eine symmetrische Trennlinie bildet, und auf

[1] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 14 (1943/44) S. 258.
[2] *W. Dworzak*, Oesterr. Ing.-Arch. 1 (1947) S. 67.
[3] Siehe Fußnote 1 von S. 256.

dem Ergänzungsteil ebenfalls eine Last $P = 1$ aufgebracht sei (Abb. 4). Dann muß die Querkraft in einem kleinen Kreisschnitt um den Aufpunkt zusammen mit der Scherkraft im Aufpunkt den Lasten $P = 1$ das Gleichgewicht halten. (Zu dieser Auffassung ist man berechtigt, da eine spezielle Randbedingung noch nicht eingeführt wurde.)

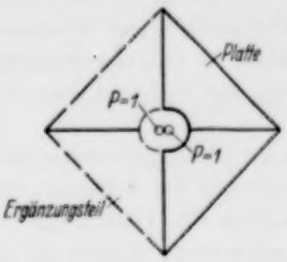

Abb. 4. Zur Berechnung von $\bar{A}$.

Die Querkraft Q_r des obigen Ausdruckes (15) über einen kleinen Kreis vom Halbmesser r beträgt[1]

$$Q_r = \bar{A} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial A r\, \bar{G}_0}{\partial r}\, dr = 8\pi \bar{A}\,. \tag{16}$$

Die Scherkraft beträgt für (15) nach *A. Nadai*

$$S_0 = \bar{A}(1-\nu)(M_{xy\,e} - M_{xy\,r})$$

$$= \bar{A}(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial x\, \partial y}\bigg|_{\varphi=-\pi/2} - \frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial x\, \partial y}\bigg|_{\varphi=+\pi/2}\right] = \bar{A}\cdot 2(1+\nu)\cdot\pi\,, \tag{17}$$

wobei $\varphi = \operatorname{artg}(y-y_0)/(x+x_0)$ gesetzt ist.

Es wird nun aus (16) und (17)

$$\left.\begin{aligned} 2S_0 + Q_r &= 8\pi\bar{A} + 2\cdot 2(1+\nu)\pi\bar{A} = 2p_0 \\ \text{mit}\qquad \bar{A} &= \frac{P_0}{2(3+\nu)\cdot\pi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Mit (18) wird der Singulärteil der *Green*schen Funktion für den Aufpunkt am freien Rand

$$\bar{G}_0 = \frac{P_0}{2(3+\nu)\pi N}\left[r^2 \ln r - \frac{1+\nu}{1-\nu}\left\{[(x+x_0)^2 - (y-y_0)^2]\ln\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2(x+x_0)(y-y_0)\operatorname{arc\,tg}\frac{y-y_0}{x-x_0}\right\} + \frac{r^2}{1+\nu}\right]. \tag{19}$$

Sollen die Stützbedingungen von m Rändern einer Platte beliebig sein, so erhält man durch Superposition aus (19)

$$\bar{G}_0 = \frac{A}{N}\left[r^2 \ln r\,(\mp) \sum_m \frac{1+\nu}{1-\nu}\left\{[(u_m+x_0)^2 - (v_m-y_0)^2]\ln\sqrt{(u_m+x_0)^2+(v_m-y_0)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2(u_m+x_0)\cdot(v_m-y_0)\operatorname{arc\,tg}\frac{v_m-y_0}{u_m+x_0}\right\} + \frac{r_0}{1+\nu}\right]. \tag{20}$$

Darin beschreiben $u_m = (x-a_m)\cdot\cos\varphi_m - (y-b_m)\cdot\sin\varphi_m$ und $v_m = (x-a_m)\sin\varphi_m + (y-b_m)\cos\varphi_m$ die Lage eines Randes. Der Ausdruck (20) stellt die allgemeinste Gestalt des Singulärteils der *Green*schen Funktion für eine Platte endlicher Ausdehnung mit beliebigen homogenen Randbedingungen dar. Liegt nämlich der Aufpunkt im Inneren, so kann die Summe der Funktionen in (20) weggelassen werden, da sie im Plattenbereich regulär sein muß und infolgedessen dem Regulärteil zugeschlagen wird, so daß allein der frühere Ausdruck (3) übrig bleibt und $A = P_0/8\pi$ wird.

Liegt der Aufpunkt auf einem freien Rand, so wird nach (18)

$$\bar{A} = \frac{P_0}{2(3+\nu)/\pi}\,.$$

Dabei ist eine der Funktionen in dem Summenausdruck von (20) singulär und beseitigt, da sie, wie oben bemerkt, die gleichen Singularitäten wie $r^2 \ln r$ besitzt, die Singularität in den Randbedingungen am freien Rand. Mit anderen Worten: läßt man den Aufpunkt (x_0, y_0) vom Innenbereich der Platte zum freien Rand wandern, so muß sich ein Teil des Regulärteils der *Green*schen Funktion zu einer unendlichen Reihe zusammenfassen lassen, die die Gestalt von (14) annimmt und die die am freien Rande in Biegemoment und Stützkraft auftretenden Singularitäten des Singulärteils der *Green*schen Funktion ausgleicht.

Rückt der Aufpunkt an einen eingespannten Rand, wird wieder eine der Funktionen in dem Summenausdruck von (20) singulär und beseitigt die Singularitäten in den Randbedingungen des eingespannten Randes, wenn man vor dem Summenausdruck das positive Vorzeichen einführt. Es ist dabei für den eingespannten Rand selbst $\nu = 0$ zu setzen. Es wird

$$\bar{A} = -\frac{P_0}{2\pi}\,.$$

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 255.

Man erhält die Singulärteile der *Green*schen Funktion für die Einflußfläche des Stützmomentes M_{0x} und der Stützkraft C_{0x} durch entsprechende Differentiation von (20). Für einen eingespannten Rand längs der y-Achse für $x = 0$ gilt für den Grenzübergang $x_0 \to 0$

$$M_{0x} = -\frac{\partial^2 \bar{G}(x_0, y_0; x, y)}{\partial x_0^2} = -\frac{P_0}{\pi N}\left(\ln r^2 + \frac{x^2}{r^2}\right), \tag{21a}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{0x} &= -\frac{\partial^3 \bar{G}(x_0, y_0; x\,y)}{\partial x_0^3} - 2\,\frac{\partial^3 \bar{G}(x_0, y_0; x\,y)}{\partial x_0\,\partial y_0^2} \\ &= -\frac{P_0}{\pi N}\cdot\left(\frac{x}{r^2} + \frac{x^3}{r^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21b}$$

Die Funktionen $\ln r^2$ und x/r^2 in den Ausdrücken (21a) und (21b) können weggelassen werden, denn sie sind Potentialfunktionen, und es gilt der Satz, daß diese im Inneren des Regularitätsbereichs keinen Extremwert haben können. Es wird also ihre Summe mit den Überlagerungsfunktionen bei Erfüllung der ersten Randbedingung von (9) im ganzen Innenbereich Null. Man erhält

$$M_{0x} = -\frac{P_0}{\pi N}\cdot\frac{x^2}{r^2}, \tag{21c}$$

$$C_{0x} = -\frac{2\,P_0}{\pi N}\,\frac{x^3}{r^4} \tag{21d}$$

als gewissermaßen modifizierte Singulärteile für die Einflußflächen von Stützmoment und Stützkraft, wie sie schon von *J. H. Michell*[1] und *A. Pucher*[2] auf anderem Wege gefunden wurden.

Für den freien Rand müssen die Einflußflächen für das Stützmoment M_{0x} und für die Stützkraft C_{0x} wegen der Randbedingung (11) Null sein und ebenfalls ihre Ableitungen nach y_0:

$$M_{0x} = \frac{\partial^2 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial x_0^2} + \nu\,\frac{\partial^2 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial y_0^2} = 0, \tag{22a}$$

$$C_{0x} = \frac{\partial^3 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial x_0^3} + (2-\nu)\,\frac{\partial^3 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial x_0\,\partial y_0^2} = 0, \tag{22b}$$

$$\frac{\partial M_{0x}}{\partial y_0} = \frac{\partial^3 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial x_0^2\,\partial y_0} + \nu\,\frac{\partial^3 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial y_0^3} = 0. \tag{22c}$$

Aus (22a) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 G(x_0 y_0; x\,y)}{\partial x^2} = -\nu\,\frac{\partial^2 G(x_0\,y_0; x\,y)}{\partial y_0^2}, \tag{22d}$$

aus (22c)

$$\frac{\partial^3 G(x_0\,y_0\,x\,y)}{\partial y_0^3} = -\nu\,\frac{\partial^3 G(x_0\,y_0\,x\,y)}{\partial x_0^2\,\partial y_0}. \tag{22e}$$

Die Bedingungen (22d) und (22e) hat man bei der Bildung der Einflußflächen für das Biegemoment M_{0y} und die Querkräfte Q_{0y}, Q_{0x} einzuführen, während sie in der Einflußfläche für das Verdrillungsmoment M_{0xy} keine Bedeutung haben, da in diesem Ausdruck nur die erste Ableitung nach x_0 und y_0 vorkommt. Man erhält so die Singulärteile der Einflußflächen der Schnittkräfte $\bar{M}_{0y}$, $\bar{Q}_{0y}$, $\bar{Q}_{0x}$, $\bar{M}_{0xy}$ für einen freien Rand längs der y-Achse für $x_0 \to 0$, wie folgt:

$$\bar{M}_{0y} = -\left(\frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial y_0} + \nu\,\frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial x_0^2}\right) = -(1-\nu^2)\,\frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial y_0^2} = \frac{(1+\nu)\,P}{(3+\nu)\,\pi N}\left[\ln r^2\,(1-\nu)\,\frac{x^2}{r^2}\right], \tag{23}$$

$$\bar{Q}_{0y} = -\left(\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial y_0^3} + \frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x_0^2\,\partial y_0}\right) = -(1-\nu)\,\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial y_0^3} = -\frac{2\,P}{\pi N\,(3+\nu)}\left[\frac{y-y_0}{r^2} + (1-\nu)\,\frac{(y-y_0)\,x^2}{r^4}\right], \tag{24a}$$

$$\bar{Q}_{0x} = -\left(\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x_0^3} + \frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x_0\,\partial y_0^2}\right) = -\frac{(1-\nu)}{(2-\nu)}\,\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x_0^3} = -\frac{2\,P}{\pi N\,(2-\nu)\,(3+\nu)}\left[\frac{x}{r^2} + (1-\nu)\,\frac{x(y-y_0)^2}{r^4}\right], \tag{24b}$$

$$\bar{M}_{0xy} = -(1-\nu)\,\frac{\partial^2 \bar{G}_0}{\partial x_0\,\partial y_0} = -\frac{P}{\pi N\,(3+\nu)}\left[\frac{x\,(y-y_0)}{r^2} + (1+\nu)\,\operatorname{arc\,tg}\,\frac{y-y_0}{x}\right]. \tag{25}$$

Die Einflußflächen $\bar{Q}_{0x}$ und $\bar{M}_{0xy}$ sind nur wegen der *Kirchhoff*schen Annahmen vorhanden.

---

[1] *J. H. Michell*, Quart. J. Math., 32 (1901).
[2] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1942) S. 76.

4. Die Bedeutung der konformen Abbildung und die Auswahl der Funktionen. Nach dem Verfahren von *F. Schultz-Grunow* ist der Innenbereich einer polygonal umrandeten Platte konform auf das Innere des Einheitskreises abzubilden. Man denkt sich dazu die Platte mit einem Gitternetz überzogen (Abb. 8). Der Plattenrand geht in den Kreisrand über, die Abbildung der Umgebung der Plattenecken erzeugt Häufungspunkte der Bildpunkte äquidistanter Gitternetzpunkte. Das bedeutet, daß eine im polygonalen Bereich erklärte Funktion wie z. B. $\overline{G}(x_0, y_0; x, y)$ durch die konforme Abbildung an den Bildpunkten der Ecken singulär wird. Die Ordnung dieser Singularitäten ist festgelegt durch den Außenwinkel β der polygonalen Umrandung und beträgt $(n\,\beta - \pi)/\pi$, wobei n jede ganze Zahl sein kann. Der Regulärteil der *Green*schen Funktion wird aus im Platteninneren regulären Potentialfunktionen aufgebaut, die im Kreis definiert sind. Diese Funktionen bleiben bei der konformen Abbildung Potentialfunktionen. Sie seien mit Φ_n und X_n bezeichnet, wobei Φ_n stets den zur x-Achse symmetrischen, X_n den zur gleichen Achse antimetrischen Teil bezeichnen soll. Aus diesen Funktionen werden die Bipotentialfunktionen ψ_n, V_n, U_n gebildet, in dem die Potentialfunktionen Φ_n und X_n mit x, y oder r multipliziert werden:

$$\psi_n = x\,\Phi_n \qquad V_n = y\,X_n \qquad U_n = r^2\,\Phi_n\,. \tag{26}$$

Es werden die Randbedingungen der Platte auf dem Kreisrand erfüllt, was sich als zweckmäßig für die numerische Rechnung erwiesen hat.

Diese Rechnung gliedert sich dann in zwei Abschnitte. Zuerst müssen die oben beschriebenen Ecken-Singularitäten eliminiert werden, was mit einer speziellen Art von im Inneren des Kreisbereiches regulären Funktionen, die hier als „Eckenfunktionen" bezeichnet sind, geschieht. Man entwickelt dazu diese Funktionen unter Berücksichtigung von je zwei Randbedingungen von der Ecke aus längs der zwei Ränder in Potenzreihen und überlagert sie dem ebenfalls in eine Potenzreihe entwickelten Singulärteil der *Green*schen Funktion. Dabei werden die Glieder, die die Singularität verursachen, identisch zum Verschwinden gebracht. Würde man alle Glieder der erwähnten Potenzreihe mittels der Eckenfunktionen zum Verschwinden bringen, so bedeutete dies die identische Darstellung des Singulärteils der *Green*schen Funktion und somit die Herstellung der trivialen Lösung. Deshalb sollen nur die Randbedingungen in den Ecken exakt erfüllt werden, indem von den Potenzreihen der Eckenfunktionen und der *Green*schen Funktion keine Glieder mit Exponenten > 1 berücksichtigt werden.

Im zweiten Abschnitt der Rechnung werden dem so ausgeglichenen Singulärteil Funktionen überlagert, die aus der analytischen Funktion $\zeta^n_{(\varrho,\Theta)}$ in der Kreisebene hergeleitet werden. Mit diesen, hier „Mittelpunktsfunktionen" genannten, Funktionen wird der Verlauf der mit den Eckenfunktionen überlagerten *Green*schen Funktion $G(x_0, y_0; x, y)$ den Randbedingungen angepaßt. Da die Eckensingularitäten bereits ausgeglichen sind, ist zu fordern, daß die mit $\zeta^n_{(\varrho,\Theta)}$ konstruierten Bipotentialfunktionen in den Eckpunkten keine Singularitäten besitzen. Weil, wie später gezeigt wird, die aus $\zeta^n_{(\varrho,\Theta)}$ hergeleiteten Funktionen unter Umständen mit den Eckenfunktionen identisch sein können, muß zum anderen gefordert werden, daß sie nicht alle Potenzen des in Reihe entwickelten Singulärteils bzw. nicht die gleichen linearen Abhängigkeiten enthalten dürfen, um nicht die triviale Lösung zu erzeugen.

Zur Begründung der Wahl gerade dieser beiden Funktionsgruppen in der Kreisebene ist anzuführen: Die Eckenfunktionen erfüllen die Randbedingungen in der Ecke exakt. Da die Ecke in der Kreisebene Häufungsstelle der Bilder äquidistanter Randpunkte der Gitternetzeinteilung ist, werden von vornherein die Randbedingungen in guter Nährung über einen relativ großen Teil des Polygonrandes erfüllt. Die Mittelpunktsfunktionen aus dem Kreis haben den Vorteil einer einfachen Bauart (längs des Kreisrandes ist r = konst.) und zum anderen eine bedeutend geringere Oszillation wie die entsprechenden Funktionen in der Polygonebene[1]. Hieraus ergibt sich die gute Konvergenz des Verfahrens. Weiter kommt noch hinzu, daß die Funktionen Φ_n, X_n, V_n, U_n voneinander linear unabhängig sind, während bei einer Bildung von entsprechenden Potenzfunktionen in der Polygonebene an Stelle von Φ_n und X_n zwei lineare Abhängigkeiten zwischen jeweils vier zu bildenden Funktionen auftreten würden, wie sich leicht aus dem Aufbau dieser Potenzfunktionen zeigen läßt. Somit steht die doppelte Anzahl von Funktionen zur Verfügung, was wegen der geringeren Oszillation eine weitere Konvergenzverbesserung des Verfahrens bedeutet. Außerdem ist es bei diesem Verfahren auch möglich, auf einem Rand die Randbedingungen verschiedener Lagerungsarten zu erfüllen.

5. Berechnung von Einflußflächen einer Dreieckplatte. Im folgenden sollen die Biege- und die Biegemomenteneinflußfläche einer Dreiecksplatte berechnet werden. Das Dreieck sei gleich-

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 255.

schenklig und rechtwinklig. Die beiden Katheten seien eingespannt, die Hypotenuse frei. Der Aufpunkt befinde sich in der Mitte des freien Randes. Die Kathetenlänge sei $a = \sqrt{2}$, die Querkontraktionszahl wird mit $\nu = 0{,}3$ angenommen. Wegen der Symmetrie wird die Betrachtung nur für die eine Hälfte des Dreiecks ausgeführt. Das Dreieck liege in der komplexen Ebene $z(x, iy)$ bzw. in Polarkoordinaten ausgedrückt $z(r, \varepsilon)$, der Kreis in einer Ebene $\zeta(\xi, i\eta)$ bzw. $\zeta(\varrho, \Theta)$. Es ist dann

$$z = x + iy = r\,e^{i\varepsilon}, \qquad \zeta = \xi + i\,\eta = \varrho\,e^{i\Theta}.$$

Für die Abbildung des Innenbereiches eines Kreises der ζ-Ebene auf das Innere eines Vielecks in der z-Ebene besteht die *Schwarz-Christoffel*sche Abbildungsformel:

$$z = c \int_{\zeta_0}^{\zeta} \pi\,(\zeta - \zeta_K)^{\frac{-\Delta\nu_K}{\pi}}\,d\zeta + B. \tag{27}$$

Hier seien ζ_K die Bildpunkte der Ecken in der Kreisbene: $\Delta\nu_K$ ist die Differenz zwischen dem Außenwinkel einer Ecke und π. B, C und ζ_0 stellen komplexe Konstante dar, die die Lage und Größe des Vieleckes in der z-Ebene bestimmen (Abb. 5). Für ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist $\Delta\nu_1 = \pi/2$; $\Delta\nu_2 = \Delta\nu_3 = 3\,\pi/4$. Die Abbildungsformel (25) geht damit in den Ausdruck

$$z = c \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial\zeta}{(\zeta-\zeta_1)^{1/2}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/4}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/4}} + B \tag{28}$$

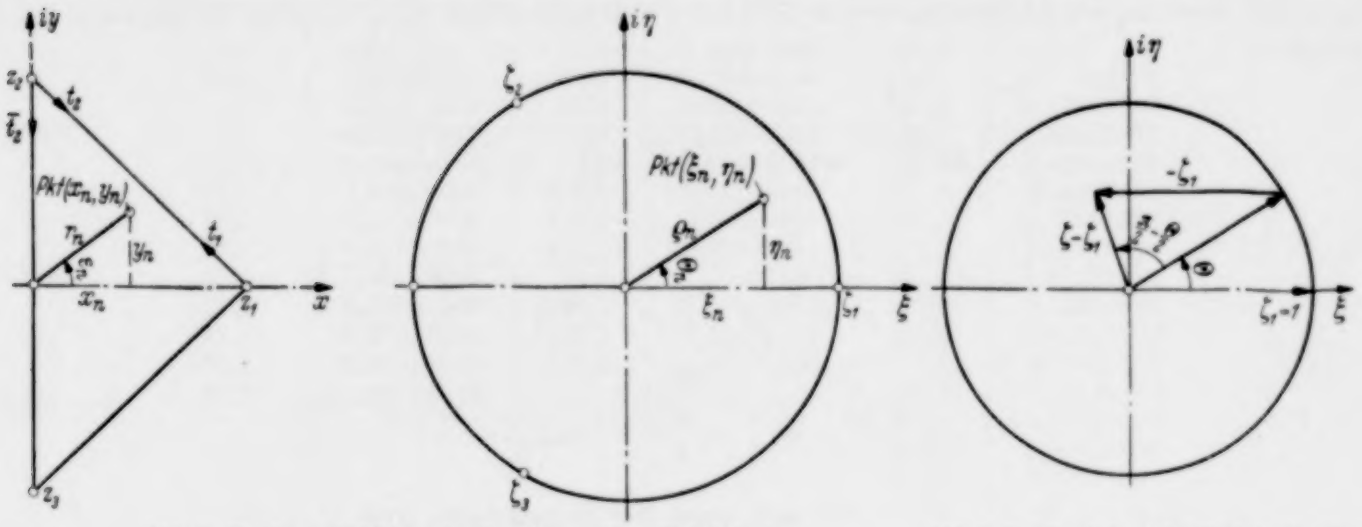

Abb. 5. Konforme Abbildung des Dreieckes auf den Einheitskreis.

Abb. 6. Zur Ermittlung der Funktion $\zeta - \zeta_1$.

über, wenn fortan z für z/a geschrieben wird. Da auf den Einheitskreis abgebildet wird, gilt für seinen Rand $\varrho = 1$ und außerdem

$$\zeta = e^{i\Theta}, \qquad d\zeta = e^{i\Theta}\,d\Theta. \tag{29}$$

Für die Bildpunkte der Ecken soll

$$\zeta_1 = e^{i0} = 1, \qquad \zeta_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}, \qquad \zeta_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi} \tag{29a}$$

gelten.

Es wird nun der Verlauf der Funktionen $(\zeta-\zeta_1)$, $(\zeta-\zeta_2)$, $(\zeta-\zeta_3)$ auf dem Rand des Einheitskreises in den Bereichen $0 < \Theta < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi < \Theta < \frac{4}{3}\pi$, und $\frac{4}{3}\pi < \Theta < \frac{2}{3}\pi$, also zwischen den Bildpunkten der Ecken untersucht.

Im Bereich $0 < \Theta < \frac{2}{3}\pi$ gilt

$$|\zeta - \zeta_1| = \left| \frac{\sin\Theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\Theta}{2}\right)} \right| = \left| 2\sin\frac{\Theta}{2} \right|.$$

Demnach ist (Abb. 6)

$$\zeta - \zeta_1 = \left| 2\sin\frac{\Theta}{2} \right| e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2}\right)}.$$

In Tabelle 1 sind die Randverläufe der Funktionen zusammengestellt.

Tabelle 1. *Randverläufe der Funktionen* $(\zeta-\zeta_1)$, $(\zeta-\zeta_2)$, $(\zeta-\zeta_3)$

	$0<\Theta<\frac{2}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi<\Theta<\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi<\Theta<2\pi$
$\zeta-\zeta_1$	$\left\|2\sin\frac{\Theta}{2}\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\frac{\Theta}{2}\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\frac{\Theta}{2}\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Theta}{2}\right)}$
$\zeta-\zeta_2$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(\frac{-7}{6}\pi+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(\frac{-7}{6}\pi+\frac{\Theta}{2}\right)}$
$\zeta-\zeta_3$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\Theta}{2}\right)}$	$\left\|2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right\| e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi+\frac{\Theta}{2}\right)}$

Wird eine Funktion bei der Annäherung an eine Ecke $= 0$, so tritt beim Überschreiten der Ecke, wie Tabelle 1 zeigt, ein Argumentsprung von $-\pi$ auf. Der Argumentsprung um $-\pi$ ergibt sich aus der Bedingung, daß die Werte, die $(\zeta-\zeta_K)$ annehmen kann, auf einem bestimmten Blatt der *Riemann*schen Fläche der Funktion $(\zeta-\zeta_K)^m$ liegen müssen. Dies sei durch Abb. 7 veranschaulicht.

Drückt man die Randverläufe der Funktionen $(\zeta-\zeta_1)$, $(\zeta-\zeta_2)$, $(\zeta-\zeta_3)$ nach Tabelle 1 aus, so erhält man in der Abbildungsformel (28) für die Randverläufe t_1, t_2, $\bar{t}_2$ (Abb. 5) folgende Ausdrücke:

$$t_1 = c_1 \int_0^{\Theta} \frac{d\Theta}{2\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|^{1/2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}} + b\,, \tag{30a}$$

$$t_2 = c_2 \int_{\Theta}^{2/3\,\pi} \frac{d\Theta}{2\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|^{1/2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}} + b\,, \tag{30b}$$

$$\bar{t}_2 = \bar{c}_2 \int_{1/3\,\pi}^{\Theta} \frac{d\Theta}{2\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|^{1/2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Theta}{2}\right)\right|^{3/4}} + b\,, \tag{30c}$$

die sich nach der Substitution von

$$\cos^4\varphi = \frac{\left(\sqrt{2}\cos\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)^2}$$

durch die elliptischen Integrale erster Gattung mit dem Modul $k = 1/\sqrt{2}$ wie folgt darstellen:

$$t_1 = c_1\,F(\varphi;k) + B_1\Big|_{\varphi_1}^{\varphi} = \frac{\pi}{2}\,, \tag{31a}$$

$$t_2 = c_2\,F(\varphi;k) + B_2\Big|_{\varphi_2}^{\varphi} = \frac{\pi}{2}\,, \tag{31b}$$

$$\bar{t}_2 = \bar{c}_2\,F(\varphi;k) + \bar{B}_2\Big|_{\varphi_2}^{\varphi} = 0\,. \tag{31c}$$

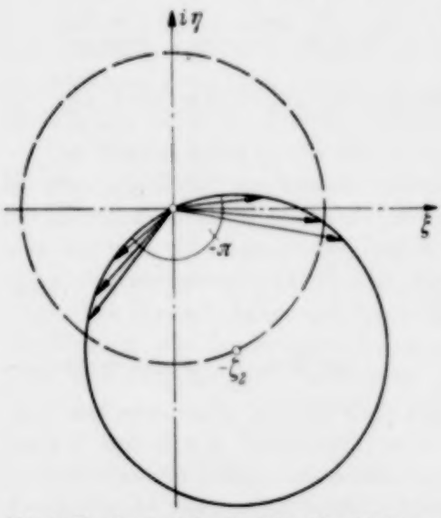

Abb. 7. Randverlauf der Funktion $(\zeta-\zeta_2)$ [ein um $-\zeta_2$ verschobener Kreis] sowie Argumentsprung um $-\pi$, wenn man den Bildpunkt der Ecke überschreitet, wobei die Pfeile den Vektor $\zeta-\zeta_2$ für $\zeta\to\zeta_2$ darstellen.

Für $\bar{t}_2$ gilt wegen der Symmetrie zur x-Achse (Abb. 5), daß für

$$\varphi = 0 \to \bar{t}_2 = 0,\ \text{für}\ \varphi = \pi \to \frac{t_2}{2} = 1$$

sein muß. Daraus ergibt sich $\bar{B}_2 = 0$, $\quad \bar{C}_2 = \dfrac{1}{F\left(\frac{\pi}{2};k\right)} = 0{,}53935260$;

für t_1 und t_2 besteht die Bedingung, daß ihr Abbildungsmaßstab auf der eingespannten Seite ein Minimum haben muß, und daß

$$t_1 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi} + t_2 \Big|_{\varphi_2}^{\varphi} = \sqrt{2}\,,$$

also gleich der Seitenlänge ist. Das Minimum tritt auf für $\cos\varphi = -1$, $\varphi = +\pi$ nach (30a) und (30b). Man erhält dann für

$$\Theta = 0 \to t_1 = 0, \quad \Theta = \frac{2}{3}\pi \to t_2 = 0$$

$$\varphi = \pi \to t_1 \Big|_{\pi/2}^{\pi} + t_2 \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \sqrt{2}\,,$$

ferner

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,F\left(\frac{\pi}{2}; k\right)} = 0{,}38173988\,,$$

$$B_1 = B_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Die Randpunkte bilden sich dann, wie in Tabelle 2 aufgeführt, ab.

Tabelle 2. *Abbildung der Randpunkte*

Θ[°]	t_1	Θ[°]	t_1	Θ[°]	$\bar{t}_1$
0,0	0,0	67,5	0,48517668	120,0	0,0
0,5	0,03828416	75,0	0,52426809	120,5	0,38742822
1,0	0,05414223	82,5	0,56674445	121,0	0,34185739
2,0	0,07657291	90,0	0,61456046	122,0	0,40665179
3,75	0,10486917	97,5	0,67103242	123,75	0,47610211
7,5	0,14541084	105,0	0,74293306	127,5	0,56691652
15,0	0,21047452	112,5	0,84943917	135,0	0,67641158
22,5	0,25900145	116,25	0,93901050	142,5	0,75179931
30,0	0,30109830	118,0	1,00797160	150,0	0,81221233
37,5	0,33957706	119,0	1,07252839	157,5	0,86444182
45,0	0,37630150	119,5	1,12695751	165,0	0,91187194
52,5	0,41215515	120,0	1,41421356	172,5	0,95656355
60,0	0,44814603			176,75	0,97835773
				178,0	0,98846699
				179,0	0,99423506
				179,5	0,99711761
				180,0	1,0

Zur Abbildung innerer Punkte des Dreiecksbereichs auf das Kreisinnere wird nochmals an (28) angeknüpft:

$$z = c \int_{\zeta_2}^{\zeta} (\zeta - \zeta_1)^{-1/2} (\zeta - \zeta_2)^{-3/4} (\zeta - \zeta_3)^{-3/4}\, d\zeta + b \tag{32}$$

mit der speziellen Lage der Bildpunkte der Ecken nach (29a). Durch Substitution

$$\cos\varphi = \sqrt[4]{\frac{-4\,(\zeta - \zeta_1\zeta_2 - \zeta_1\zeta_3)\,(\zeta - \zeta_2)\,(\zeta - \zeta_3)}{(\zeta - \zeta_1)^2\,(\zeta_1 - \zeta_2)^2}} = \sqrt[4]{\frac{(1-\zeta)^2}{(\zeta^2 + \zeta + 1)\cdot 4}} \tag{33}$$

wird das Integral wieder auf die Form eines elliptischen Integrals erster Gattung gebracht mit $k = 1/\sqrt{2}$:

$$z = \bar{c}\; F(\varphi; k) \Big|_{\varphi_n}^{\varphi} + \bar{b}\,. \tag{34}$$

Die Konstanten $\bar{c}$, $\bar{b}$, φ_n errechnen sich aus den folgenden Anfangsbedingungen:

1) $\zeta = 0$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\varphi = \varphi_n = \frac{\pi}{4}$, $z = \bar{b}$,

2) $\zeta = 1$, $\cos\varphi = 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $z = 1 = \bar{c}\; F(\varphi; k) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \bar{b}$,

3) $\zeta = -1$, $\cos\varphi = 1$: $\varphi = 0$, $z = 0 = \bar{c}\; F(\varphi; k) \Big|_{\pi/4}^{0} + \bar{b}$.

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}} = F(\varphi;k)\,, \quad \varphi = am\,\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}} \\ &\cos\varphi = cn\,\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}} = cn\left(\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}} + i\,\frac{y}{\bar{c}}\right) = \sqrt[4]{\frac{(1-\zeta)^2}{(\zeta^2-\zeta+1)}} \\ &\quad = \frac{1+2\,cn^4\left(\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}}\right) + cn^2\left(\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}}\right)\sqrt{12\left(1-cn^4\,\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}}\right)}}{1-4\,cn^4\,\frac{(z-\bar{b})}{\bar{c}}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Es bedeutet hierin

$$cn\,\frac{z-\bar{b}}{\bar{c}} = \frac{cn\,\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}}\,cn\,\frac{y}{\bar{c}}}{1-sn^2\left(\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}}\right)\cdot dn^2\,\frac{y}{\bar{c}}} - i\,\frac{sn\,\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}}\,dn\,\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}}\,sn\,\frac{y}{\bar{c}}\,dn\,\frac{y}{\bar{c}}}{1-sn^2\left(\frac{x-\bar{b}}{\bar{c}}\,dn^2\,\frac{y}{\bar{c}}\right)}\,.$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt

$$\xi = \varrho\cos\Theta = \mathrm{Re}[\zeta]\,, \quad \varrho^2 = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,,$$
$$\eta = \varrho\sin\Theta = \mathrm{Im}[\zeta]\,, \quad \mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\eta}{\xi}\,.$$

In Tabelle 3 ist die Zuordnung der Punkte der Dreieck- und der Kreisebene angegeben (Abb. 8).

Tabelle 3. *Abbildung der Gitternetzpunkte des Dreiecks auf den Kreis*

Pkt	ξ	η	Pkt	ξ	η	Pkt	ξ	η
00	—1,0	0,0	20	—0,85152883	+0,52430785	50	—0,56722327	+0,82356401
01	—0,73306117	0,0	21	—0,66328894	+0,43812174	51	—0,51920015	+0,78467926
02	—0,50949597	0,0	22	—0,48377889	+0,40000582	52	—0,41245361	+0,77150196
03	—0,30249597	0,0	23	—0,30519426	+0,39328676	53	—0,37738982	+0,87979429
04	—0,09632627	0,0	24	—0,11814602	+0,40926982	54	—0,29335392	+0,86253259
05	+0,11841868	0,0	25	+0,08762038	+0,44108809	55	—0,19999997	+0,97979593
06	+0,34461158	0,0	26	+0,32290223	+0,47766695	60	—0,52803211	+0,84922443
07	+0,57496061	0,0	27	+0,59516350	+0,49522055	61	—0,50214191	+0,82972098
08	+0,78690954	0,0	28	+0,89378831	+0,44848909	62	—0,46422604	+0,83111801
09	+0,94217548	0,0	30	+0,73287245	+0,68036605	63	—0,42193193	+0,85979713
010	+1,0	0,0	31	—0,60387659	+0,59709917	64	—0,38189799	+0,92420447
10	—0,95666366	+0,29119520	32	—0,46445690	+0,56099438	70	—0,50894114	+0,86080133
11	—0,71324625	+0,23384466	33	—0,31611417	+0,56163934	71	—0,49696756	+0,85368073
12	—0,50201517	+0,20894721	34	—0,15395387	+0,59394916	72	—0,47933107	+0,86020679
13	—0,30254831	+0,20253746	35	+0,03356481	+0,65460699	73	—0,46360522	+0,88604186
14	—0,10111004	+0,20823544	36	+0,26523427	+0,73758210	80	—0,50177129	+0,86500031
15	+0,11188020	+0,22077770	37	+0,57306536	+0,81950968	81	—0,49769423	+0,86381615
16	+0,34121249	+0,23283384	40	—0,63449126	+0,77293003	82	—0,49288978	+0,87009176
17	+0,58263607	+0,23165010	41	—0,55304070	+0,71016515	90	—0,50011079	+0,86596143
18	+0,81480089	+0,19863935	42	—0,45309090	+0,68612330	91	—0,49955678	+0,86628113
19	+0,99293983	+0,11861931	43	—0,34017569	+0,69883658	100	—0,5	+0,86602540
			44	—0,21298158	+0,74951277			
			45	—0,06263569	+0,84363658			
			46	+0,13360166	+0,99103513			

Um nun die Eckensingularitäten in der Kreisebene ausgleichen zu können wird $G_0(x_0,y_0;x,y)$ über den Bildpunkt von der Ecke aus auf dem Kreisrand in eine Reihe nach steigenden Potenzen von Θ entwickelt. Zunächst wird die Entwicklung der Abbildungsfunktionen, die durch (31a) bis (31c) gegeben sind, durchgeführt. Man erhält folgende Anfangsglieder der Reihe bis zu Potenzen $\leqq 7/4$:

$$\frac{dt_1}{d\Theta} = c_1\,\frac{1}{\sqrt[4]{3}\,\sqrt{2}}\,\Theta^{-1/2}\left(1+\frac{13}{48}\,\Theta^2\right),$$

$$\frac{dt_2}{d\Theta} = c_2\,\frac{1}{\sqrt[8]{3}\,\sqrt{2}}\left[\left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{-3/4} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{1/4}\right],$$

$$\frac{d\bar{t}_2}{d\Theta} = \bar{c}_2\,\frac{1}{\sqrt[8]{3}\,\sqrt{2}}\left[\left(\Theta-\frac{2}{3}\pi\right)^{-3/4} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\cdot\left(\Theta-\frac{2}{3}\pi\right)^{1/4}\right].$$

Die Integration mit den Werten aus (31 ff) ergibt

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[8]{3}}\, c_1 \left(\Theta^{1/2} + \frac{13}{5 \cdot 48}\,\Theta^{5/2}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\, c_1 = 0{,}40981935\,, \tag{36a}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[8]{3}}\, c_2 \left[\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{1/4} - \frac{1}{40\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{5/4}\right] \quad \text{mit} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[8]{3}}\, c_2 = 0{,}94029173\,, \tag{36b}$$

$$\bar{t}_2 = \frac{2}{\sqrt[8]{3}}\, \bar{c}_2 \left[\left(\Theta - \frac{2}{3}\pi\right)^{1/4} + \frac{1}{40\sqrt{3}}\left(\Theta - \frac{2}{3}\pi\right)^{5/4}\right] \quad \text{mit} \quad \frac{2}{\sqrt[8]{3}}\, \bar{c}_2 = 0{,}94029173 \tag{36c}$$

und damit an der Ecke 1 (Abb. 5)

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - \frac{t_1}{\sqrt{2}} = 1 - 0{,}289786\,\Theta^{1/2}, \quad y = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = +\,0{,}289786\,\Theta^{1/2} \\ r^2 &= 1{,}0 - 0{,}579572\,\Theta^{1/2} + 0{,}167952\,\Theta^{1}, \end{aligned}\right\} \tag{37a}$$

an der Ecke 2 (eingespannter Rand)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{t_2}{\sqrt{2}} = 0{,}664887\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{1/4}, \quad y = 1 - \frac{t_2}{\sqrt{2}} = 1{,}0 - 0{,}664887\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{1/4}, \\ r^2 &= 1{,}0 - 1{,}329773\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{1/4} + 0{,}884149\left(\frac{2}{3}\pi - \Theta\right)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{37b}$$

an der Ecke 2 (freier Rand)

$$x = 0\,, \quad y = r = 1 - \bar{t}_2 = 1 - 0{,}940292\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right)^{1/4}. \tag{37c}$$

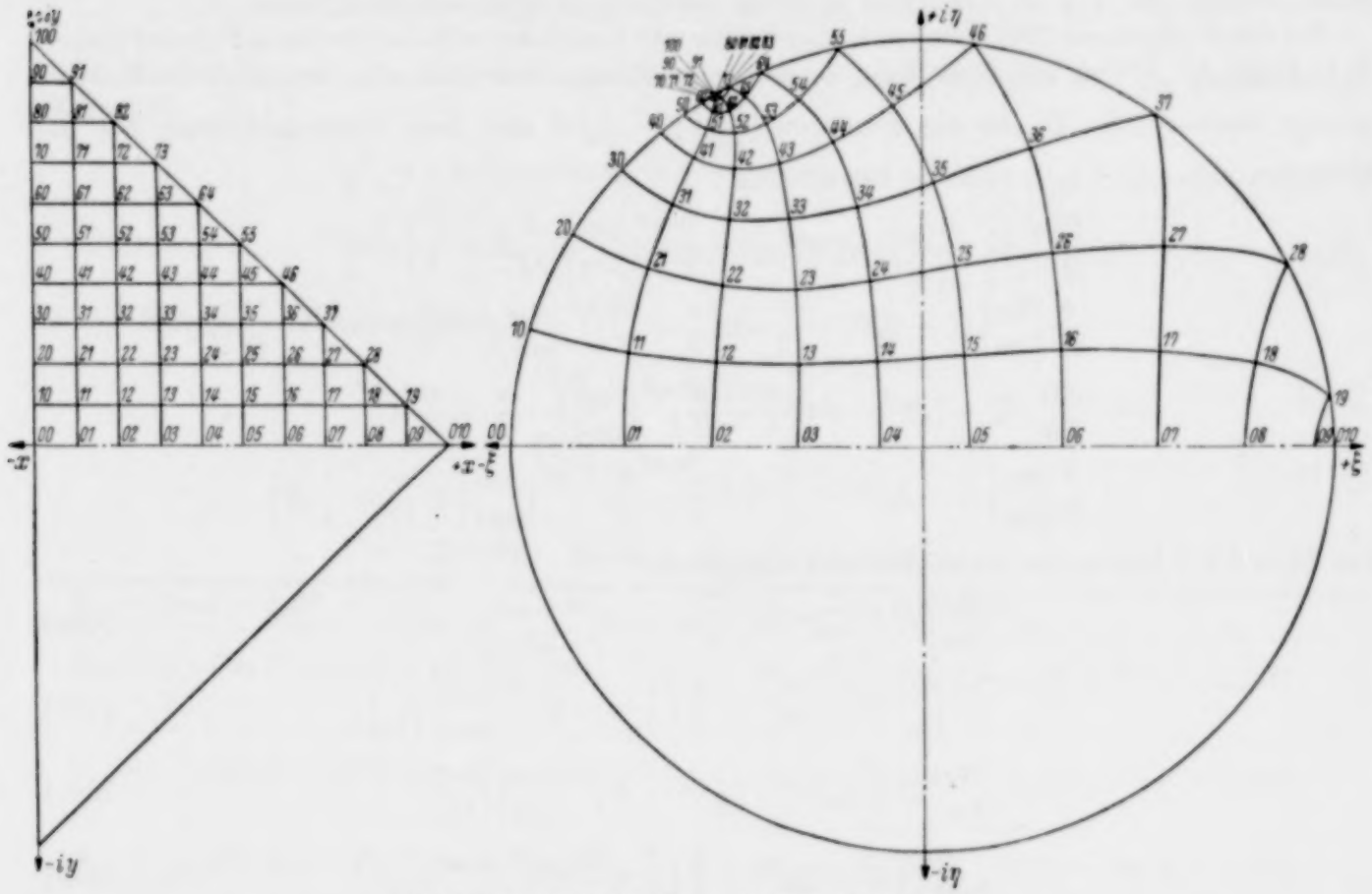

Abb. 8. Zuordnung der Gitterpunkte Dreieck—Einheitskreis.

Mit Einführung dieser Ausdrücke in (19) erhält man die Entwicklung von $\bar{G}_0(x_0, y_0; x, y)$ an den Ecken in Potenzen von Θ. Ebenso lassen sich auch die Normalableitungen und höheren Ableitungen mit den Formeln (37) an der Ecke entwickeln. Diese Ableitungen können sowohl in der Polygonebene wie auch in der Kreisebene durchgeführt werden, da sich wegen der konformen Abbildung die Richtungen in beiden Bildern entsprechen. Im weiteren sollen für die Randbedingungen alle Ableitungen in der Polygonebene gebildet werden. Es ist dann auf der eingespannten

Seite, wenn n die Normalenrichtung in der Polygonebene bedeutet,

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial r^2}{\partial n} = \sqrt{2}, \tag{38a}$$

auf der freien Seite

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial r^2}{\partial n} = 0. \tag{38b}$$

Für eine im Kreis definierte Funktion $\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)$ lautet die Normalableitung in der Polygonebene, wie folgt:

$$\frac{\partial \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n} = \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial n}. \tag{38c}$$

Der Ausdruck $\partial\varrho/\partial n$ ist der Maßstabsfaktor der konformen Abbildung. Man kann wegen (28)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial n} = \left|\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right| = c\,|\zeta-\zeta_1|^{1/2}\,|\zeta-\zeta_2|^{3/4}\,|\zeta-\zeta_3|^{3/4} \tag{38d}$$

bilden.

Die Eckenfunktionen, die die Elimination der Potenzen von Θ des Singulärteils der *Green*schen Funktion bewirken sollen, und deshalb dieselben Potenzen in Θ wie jener enthalten müssen, haben die Gestalt

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_1)^{m/2}, \quad \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{m/4}, \quad \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_3)^{m/4}, \tag{39}$$

wie schon aus der Abbildungsfunktion zu vermuten war. Es sind Potentialfunktionen und durch Multiplikation mit x, y oder r^2 erhält man die zugehörigen Bipotentialfunktionen.

Bei den Funktionen (39) lassen sich aber bestimmte Beziehungen zwischen ihren Entwicklungen in Θ längs der beiden von einer Ecke ausgehenden Ränder herleiten, wie dies an einem Beispiel gezeigt werden soll. Es sei die Funktion $\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2}$ und ihre Normalableitung für die Koordinatenbereiche t_2, $\bar{t}_2$ (Abb. 5) betrachtet:

$$t_2: \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\Theta}{4}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(-\frac{5}{12}\pi+\frac{3\Theta}{4}\right)\left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|,$$

$$\bar{t}_2: \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\Theta}{4}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\Theta}{2}\right)^{-1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(+\frac{\pi}{12}+\frac{3}{4}\Theta\right).$$

Für $\Theta \to 2\pi/3$ lauten die ersten Entwicklungsglieder

$$t_2: \quad \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{7}{12}\pi\right), \tag{39a}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{1/4} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\pi}{12}\right). \tag{39b}$$

$$\bar{t}_2: \quad \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{1/2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\pi}{12}\right), \tag{39c}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta-\zeta_2)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\Theta\right)^{1/4} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{7}{12}\pi\right). \tag{39d}$$

Man sieht, daß die Entwicklungsglieder der Potenzreihe in (39a) und (39d), sowie in (39b) und (39c) die gleichen Koeffizienten besitzen.

Ähnliche Zusammenhänge lassen sich für alle Glieder mit gleichen Exponenten m finden. Da sich aber alle verwendeten Potentialfunktionen durch eine Reihe der Form $(\zeta-\zeta_2)^{m/4}$ darstellen lassen, bedeutet das, daß bei Ausgleich einer Potenz von Θ auf der einen Seite der Ecke, auf der anderen Seite ebenfalls eine bestimmte Potenz von Θ ausgeglichen wird. Die auf diese Weise gefundenen Bedingungen sind in Tabelle 4 zusammengestellt.

Tabelle 4. *Zusammenhang der Potentialfunktionen*

Potenzen von für $m =$	Rand 1 Funktion	Rand 1 Normalabl.	Rand 2 Funktion	Rand 2 Normalabl.
0, 4, 8, 12, 16	x	x	x	x
2, 6, 10, 14, 18	x	x	x	x
1, 5, 9, 13, 17	$[x$	$-x]$	x	
	$[x$	$+x]$		x
3, 7, 11, 15, 19	$[x$	$+x]$	x	
	$[x$	$-x]$		x

Wegen dieser Beziehungen wurde zur Erleichterung der numerischen Rechnung für den Eckenausgleich der Singulärteil (19) dargestellt durch

$$\bar{G}_0 = x\,G_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}}\,,$$

wobei G_{I} und G_{II} Potentialfunktionen bedeuten. Dadurch erreicht man, daß G_{I} und G_{II} je für sich mittels der Eckenfunktionen (39) ausgeglichen werden können. Das geschieht in der Weise, daß die nach Potenzen entwickelten Glieder von G_{I}, G_{II} und der Eckenfunktionen (39) in einem Gleichungssystem gleichgesetzt wurden. Die Rechnung in dieser Form hat den Vorteil, daß das hier vorliegende Gleichungssystem von 26 Unbekannten in mehrere kleinere Systeme mit höchstens 5 Unbekannte zerfällt, da die Matrix desselben auf Grund obiger Beziehungen nur zur Hälfte besetzt ist. Der in deren Ecken ausgeglichene Singulärteil besitzt die Form

$$G_{0\,1} = x \sum_m (G_{\mathrm{I}} + c_m \Phi_m) + \sum_m (G_{\mathrm{II}} + c_m \Phi_m)\,,$$

worin die Konstanten c_m und C_m sich aus dem Gleichungssystem ergeben. Für die Biegeeinflußfläche gilt

$$\frac{G_{\mathrm{I}\,B}}{2} = x \ln r - y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{1+\nu}\cdot x\,, \tag{40a}$$

$$\frac{G_{\mathrm{II}\,B}}{2} = -\frac{1}{1-\nu}\left[(x^2-y^2)\ln r - 2\,x\,y \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] - \frac{1}{2\,(1+\nu)}(x^2-y^2)\,, \tag{40b}$$

für die Biegemomenteneinflußfläche

$$\frac{G_{\mathrm{I}\,M}}{2} = -(1-\nu)\frac{x}{r^2}\,, \tag{41a}$$

$$\frac{G_{\mathrm{II}\,M}}{2} = \ln r^2\,. \tag{41b}$$

Tabelle 5. *Die verwendeten Eckenfunktionen*

$\Phi_{1,1} = \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_1)^{1/2}$	$\Phi_{1,3} = \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_1)^{3/2}$
$\Phi_{2,1} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{1/4} + \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{1/4}]$	$\Phi_{3,1} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{1/2} + \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{1/2}]$
$\Phi_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{1/2} - \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{1/2}]$	$\Phi_{3,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{1/2} + \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{1/2}]$
$\Phi_{2,3} = \frac{1}{2^{3/4}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/4} - \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/4}]$	$\Phi_{3,3} = \frac{1}{2^{3/4}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/4} - \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/4}]$
$\Phi_{2,5} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{5/4} + \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{5/4}]$	$\Phi_{3,5} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/4} + \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/4}]$
$\Phi_{2,6} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/2} - \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/2}]$	$\Phi_{3,6} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{3/2} + \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{3/2}]$
$\Phi_{2,7} = \frac{1}{2\cdot 2^{3/4}}\,[\mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_2)^{7/4} - \mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_3)^{7/4}]$	$\Phi = \frac{1}{2\cdot 2^{3/4}}\,[\mathrm{Im}\,(\zeta-\zeta_2)^{7/4} - \mathrm{Re}\,(\zeta-\zeta_3)^{7/4}]$

Entsprechend der Symmetriebedingung wurden die in Tabelle 5 zusammengestellten Eckenfunktionen aufgestellt, wobei die erste Indexbezeichnung die Ecke, die zweite den Wert von m angibt.

Für den Ausgleich der übrigbleibenden ganzzahligen Exponenten von Θ wurden sogenannte Mittelpunktsfunktionen, das sind Funktionen der Form $\Phi_m = \begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} \varrho^m e^{i m \Theta}$ verwandt. Es sei bemerkt, daß die Eckenfunktionen $\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} (\zeta - \zeta_k)^m$ für ganzzahliges m sich immer als Summen solcher Mittelpunktsfunktionen darstellen lassen, z. B.

$$\mathrm{Re}\,(\zeta - \zeta_1)^2 = \mathrm{Re}\,\zeta^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\zeta\,\zeta_1 + \mathrm{Re}\,\zeta_1^2 = \mathrm{Re}\,\zeta^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\zeta + 1\,.$$

Entsprechend den Symmetriebedingungen wurden folgende Mittelpunktsfunktionen aufgestellt:

$$\Phi_0 = \mathrm{Re}(\zeta^1) = 1\,,$$
$$\Phi_1 = \mathrm{Re}(\zeta^1) = \varrho \cos\Theta\,,$$
$$\Phi_2 = \mathrm{Re}(\zeta^2) = \varrho^2 \cos 2\,\Theta\,,$$
$$\Phi_3 = \mathrm{Re}(\zeta^3) = \varrho^3 \cos 3\,\Theta\,,$$
$$\Phi_4 = \mathrm{Re}(\zeta^4) = \varrho^4 \cos 4\,\Theta\,.$$

Tabelle 6. *Die Konstanten des Singularitätenausgleiches*

m	C_m		C	
	Biegung	Moment	Biegung	Moment
1,1	+ 0,725065	— 0,409819	+ 0,900702	+ 0,409819
1,3	— 0,169795	+ 0,171295	— 0,225176	— 0,125398
2,1	+ 0,500266	+ 0,887129	— 5,477503	+ 0,680718
3,1	— 2,597849	— 0,680719	+ 1,105323	+ 0,887129
2,2	— 0,603885	+ 1,207769	+ 1,892283	— 0,161811
3,2	— 0,161810	+ 0,323620	+ 3,778807	+ 0,603885
2,3	— 0,089176	+ 0,535058	+ 0,615115	— 0,430581
3,3	— 0,215291	+ 1,291744	— 0,254790	+ 0,178352
2,5	— 0,463256	— 1,801775	— 0,281622	+ 0,227307
3,5	— 0,386728	— 0,044754	+ 1,458046	— 0,415149
2,6	— 0,149436	— 0,991282	+ 2,090895	+ 0,476945
3,6	+ 0,292637	— 1,875427	— 0,085335	— 0,034871
2,7	— 0,182704	+ 1,340034	— 0,021438	+ 0,303999
3,7	+ 0,048798	— 2,144711	— 0,506483	+ 0,392581
0	+ 2,389813	+ 6,489717	— 0,399717	— 2,323259
1	+ 0,609183	+ 2,016635	+ 1,161052	+ 1,196505
2	— 0,053214	— 1,903354	— 0,038399	+ 0,421469
3	+ 0,013187	+ 0,882574	— 0,008250	— 0,154710
4	— 0,010187	— 0,358393	— 0,001198	+ 0,058886

Mit diesen Ecken- und Mittelpunktsfunktionen wurde der Eckenausgleich durchgeführt und dabei die Konstanten der Tabelle 6 errechnet.

Zu dem Singularitätenausgleich ist noch zu erwähnen, daß an den eingespannten Rändern die Eckensingularitäten ausgeglichen sind, wenn die Glieder der Potenzreihe bis zur Potenz Θ^1, dagegen am freien Rand erst, wenn die Glieder bis $\Theta^{7/4}$ eliminiert werden, da in den Randbedingungen des freien Randes die zweiten und dritten Ableitungen vorkommen.

6. Punktweise Erfüllung der Randbedingungen. Nachdem der Singulärteil in den Ecken durch die Überlagerung von Eckenfunktionen identisch dargestellt wurde, und somit in den Ecken die Randbedingungen exakt erfüllt sind, werden dem so ausgeglichenen Singulärteil nun Mittelpunktsfunktionen in der Weise überlagert, daß die Randabweichungen möglichst klein werden. Die Mittelpunktsfunktionen als Potentialfunktionen sind mit Φ_m und X_m bezeichnet, wobei der Index m die Potenz von ϱ bzw. den Faktor von Θ bedeutet:

$$\Phi_m = \mathrm{Re}(\zeta)\,, \qquad X_m = \mathrm{Im}(\zeta)\,.$$

Die zu überlagernden Mittelpunktsfunktionen werden so gebildet, daß sie in den Bildpunkten der Ecken ebenfalls keine Glieder mit Potenzen von Θ^m mit $m \leqq 1$ enthalten. Das wird erreicht, in dem mehrere Mittelpunktsfunktionen durch Summation zu einer einzigen zusammengefaßt werden. Dabei lassen sich alle möglichen linear von einander unabhängigen Kombinationsmöglichkeiten ausschöpfen. Man erhält dann den Symmetriebedingungen entsprechend

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_5 &= \Phi_5 + 2\,\Phi_1 - 2{,}5\,\Phi_2 + 0{,}5\,\Phi_4\,,\\
\varphi_6 &= \Phi_6 + \Phi_0 - 2\,\Phi_3\,,\\
\varphi_7 &= \Phi_7 + \Phi_1 - 2\,\Phi_4\,,\\
\varphi_8 &= \Phi_8 + \Phi_2 - 2\,\Phi_5\,,\\
\varphi_9 &= \Phi_9 + 2\,\Phi_0 - 3\,\Phi_3\,,\\
\varphi_{10} &= \Phi_{10} + 2\,\Phi_1 - 3\,\Phi_4\,,\\
\varphi_{11} &= \Phi_{11} + 2\,\Phi_2 - 3\,\Phi_5\,,\\
\varphi_{12} &= \Phi_{12} + 3\,\Phi_0 - 4\,\Phi_3\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Durch Einsetzen von X statt Φ erhält man die antimetrische Funktion. Die zugehörigen Bipotentialfunktionen werden wieder durch Multiplikationen mit x, y oder r^2 erhalten:

$$\psi_m = x\,\varphi_m \qquad U_m = r^2\,\varphi_m \qquad V_m = y\,X_m\,. \tag{43}$$

Diese Funktionen φ_m, ψ_m, U_m, V_m sind nun so dem Singulärteil zu überlagern, daß die Randverläufe folgenden Randbedingungen angenähert werden:

eingespannter Rand

$$G_{01} + \sum_m (C_m\varphi_m + c_m\psi_m + K_m U_m + K_m V_m) = 0\,,$$

$$\frac{\partial G_{01}}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n}\sum_m (C_m\varphi_m + c_m\psi_m + K_m U_m + K_m V_m) = 0,$$

freier Rand

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[G_{01} + \sum_m (C_m\varphi_m + c_m\psi_m + K_m U_m + K_m V_m)\right] = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\,\frac{\partial_3}{\partial y\,\partial x^2}\right)\left[G_{01} + \sum_m (C_m\varphi_m + c_m\psi_m + K_m U_m + K_m V_m)\right] = 0\,.$$

Die erstrebte Annäherung an die Randbedingungen wird erreicht durch ihre exakte Erfüllung in einer beschränkten Anzahl von Punkten. Um aber den höheren Rechenaufwand bei der Bildung der zweiten und dritten Ableitungen, die die Randbedingungen des freien Randes enthalten und die Randbedingungen für Stützmoment und Stützkraft formulieren, zu umgehen, werden nicht diese, sondern das Integral bzw. Doppelintegral über dieselben längs des freien Randes an verschiedenen Punkten zu Null gemacht; denn da zwischen zwei Nullpunkten eine reguläre Funktion mindestens ein Extremum besitzt, so muß auch ihre erste bzw. zweite Ableitung zwischen bzw. in der Nähe zweier solcher Punkte mindestens einmal Null werden. Es werden also durch diese punktweise Erfüllung der Integralverläufe auch Stützmoment und Stützkraft mindestens an etwa ebensoviel Punkten Null werden.

Die Integration der Potentialfunktionen Φ_m wird mit Hilfe der *Laplace*schen und *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen durchgeführt. Die Bipotentialfunktionen ψ_m können wegen $x = 0$ am freien Rand integriert werden. Die Bipotentialfunktionen V_m und U_m werden für die Integration durch $x\,\Phi_K + \Phi_L$ dargestellt. Es ergeben sich für die einzelnen Funktionen folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy = -(1-\nu)\,\frac{\overline{\partial}\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n}\,,\\
&\int\int\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\,\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\right)\left(\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy^2 = (1-\nu)\,\frac{\partial\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n}\,,\\
&\int\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(x\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy = -2\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)\,,\\
&\int\int\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\,\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\right)\left(x\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right) dy^2 = (1+\nu)\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\,,\\
&\int\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(r^2\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right] dy = (1+\nu)\,2\,y\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta) + (1-\nu)\,r^2\,\frac{\partial\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n}\,,\\
&\int\int\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\,\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\right)\left(r^2\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy^2 = (1-\nu)\,r^2\,\frac{\partial\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n} - 4\,y\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)\,,\\
&\int\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(y\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy = (1+\nu)\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta) + (1-\nu)\,y\,\frac{\partial\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n}\,,\\
&\int\int\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\right)\left(y\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)\right)\right] dy^2 = -2\begin{Bmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{Bmatrix} f(\zeta) - (1-\nu)\,y\,\frac{\partial\begin{Bmatrix}\mathrm{Im}\\ -\mathrm{Re}\end{Bmatrix} f(\zeta)}{\partial n}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Die dem Stützmoment M_{0x} entsprechenden Ableitungen des Singulärteils der Biegeeinflußfläche wie auch der Schnittkrafteinflußflächen sind am freien Rande gleich Null, ebenso auch die Integrale längs des freien Randes über diese Ableitungen. Die der Stützkraft C_{0x} entsprechenden Ableitungen der Singulärteile der Einflußflächen sind ebenfalls am freien Rande gleich Null. Auch die Doppelintegrale längs des freien Randes über diese Ableitungen mit Ausnahme des Doppelintegrals über den Stützkraftausdruck der Biegeeinflußfläche sind Null. Dieses letztere jedoch nimmt folgende Gestalt längs des freien Randes an:

$$\frac{1}{2}\int\int\left[\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x^3}+(2-\nu)\,\frac{\partial^3 \bar{G}_0}{\partial x\,\partial y^2}\right]dy^2=(3+\nu)\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{x\to 0}=(3+\nu)\,\frac{\pi}{2}\,y\,. \tag{45}$$

Diese Funktion (45) hat an der Stelle $y = 0$ (Abb. 5), also im Aufpunkt eine Spitze. Da die Überlagerungsfunktionen aber alle dort regulär sind, ließe sich mit ihnen weder das Doppelintegral über die Stützkraft noch die Stützkraft selbst ausgleichen. Jedoch ist die zweite Ableitung nach y (längs des freien Randes) von (45) gleich Null und man kann deshalb (45) überhaupt weglassen, was soviel bedeutet, daß man diese Funktion von y wieder in Abzug bringt. Für den vorher vollzogenen Eckenausgleich bedeutet das aber, daß nun am freien Rand in der Ecke wieder die Singularitäten dieser Funktion von y (37c) auftreten. Von den Mittelpunktsfunktionen besitzt aber ebenfalls eine, nämlich U_5 in (43) eine solche Singularität, so daß mit dieser Funktion also der Ausgleich in der Ecke und dann mittels den übrigen Funktionen die punktweise Erfüllung ausgeführt werden kann.

Es lassen sich aber durch Summation mehrerer Eckenfunktionen auch zwei Funktionen herstellen, die diese zusätzlich auftretende Eckensingularität ausgleichen. Sie lassen sich in der Form

$$\psi_y=\sum_m\,(C_m\,\Phi_m+c_m\,\psi_m)\,,$$

$$V_y=\sum_m\,(C_m\,\Phi_m+K_m\,V_m)$$

schreiben. Eine der Funktionen U_5, ψ_y, V_y muß also hinzugenommen werden zu der punktweisen Erfüllung, da ohne sie eine auch nur näherungsweise Erfüllung der Randbedingung der Stützkraft für die Biegeeinflußfläche nicht möglich ist. Die Bedingungen für die punktweise Erfüllung und die letztgenannte Bedingung wurden in einem Gleichungssystem zusammengestellt. Zusätzlich wurde noch die Erfüllung von Stützmoment und Stützkraft selbst im Aufpunkt gefordert. Die Ausrechnung des Gleichungssystems ergab die Konstanten in Tabelle 7.

Tabelle 7

m	C_m		c_m		K_m		k_m	
	Biegung	Moment	Biegung	Moment	Biegung	Moment	Biegung	Moment
0	— 50,711831	+117,912629	+149,013065	—220,301587	— 78,726474	—100,674663	—	—
1	— 82,131071	+210,369150	+161,587416	—335,131495	—135,288946	+425,712801	+ 32,615249	+ 48,038623
2	— 36,826453	+ 89,347665	+ 99,861082	—255,495318	— 24,627343	+ 33,127950	+ 39,371866	—183,789778
3	+112,893538	—279,484262	—347,760343	+500,167824	+173,038082	+315,286788	+198,316904	—764,028817
4	+193,414886	—500,024982	—391,060086	+841,046416	+338,221528	—1067,272255	— 65,918293	—152,271840
5	+ 88,892888	—228,058863	—235,960225	+623,666896	+ 60,148573	—107,028053	— 95,376382	+432,816272
6	— 71,028788	+198,371341	+242,730292	—316,258489	—107,144064	—342,644595	—161,742830	+617,024285
7	—140,917163	+373,835454	+297,391938	—679,226065	—268,082244	+857,406107	+ 33,521375	+156,925867
8	— 66,777736	+182,692497	+172,299786	—478,067292	— 49,158491	+114,672256	+ 72,120753	—318,115351
9	+ 6,224286	— 29,940412	— 38,231815	+ 13,219854	+ 10,079778	+142,127478	+ 46,442769	—175,459384
10	+ 29,489167	— 82,711740	— 67,909064	+172,552829	+ 65,897854	—215,846653	— 0,359170	— 53,743233
11	+ 14,855490	— 45,449181	— 36,210848	+110,654057	+ 12,889068	— 40,772153	— 16,257077	+ 68,038273
12	+ 2,622795	— 6,859296	— 5,751199	+ 23,172398	+ 2,752678	— 14,095008	— 3,539888	+ 14,089600

Es hat sich im Verlauf der Rechnung gezeigt, daß es für eine gute Näherung erforderlich ist, außer in den Mittelpunkten der eingespannten Seiten auch je Halbseite noch mindestens in drei Punkten, beim freien Rand je Halbseite in vier Punkten, die Randbedingungen zu erfüllen. Bei einer noch weitergehenden punktweisen Erfüllung und damit einer noch weiterreichenden Erfüllung der Randbedingungen änderten sich die Einflußflächen nur noch geringfügig, woran die Konvergenz der Näherung zu erkennen ist. Der maximale Randfehler, bezogen auf die maximale Durchbiegung unter dem Aufpunkt, beträgt in der vorliegenden Rechnung bei der Biegeeinflußfläche am eingespannten Rand 4,2%, am freien Rand etwa 4%. Eine Verringerung des maximalen Randfehlers bei der Biegeeinflußfläche am eingespannten Rand von 7% auf 4,2% und am freien Rand von 7,5% auf etwa 4% ergab eine Veränderung des Maximalwertes der Biegeeinflußfläche von weniger als 2%. Somit ist also eine Näherung von 2% Genauigkeit erreicht.

Die Auswertung der Einflußflächen, die in Abb. 9 und 10 dargestellt sind, hatte folgendes Ergebnis: Für eine Platte in Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit eingespannten Katheten der Länge a und freier Hypothenuse ist mit $\mu = 0{,}3$

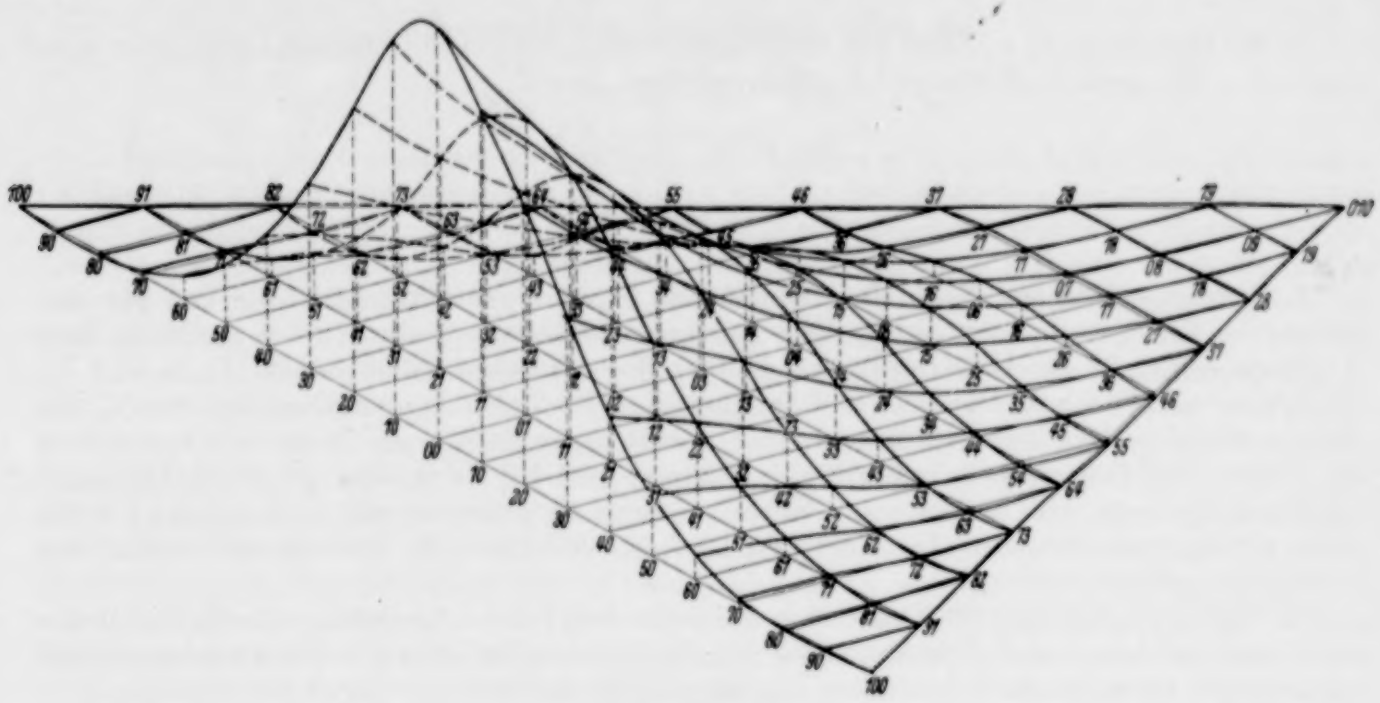

Abb. 9. Biegeeinflußfläche.

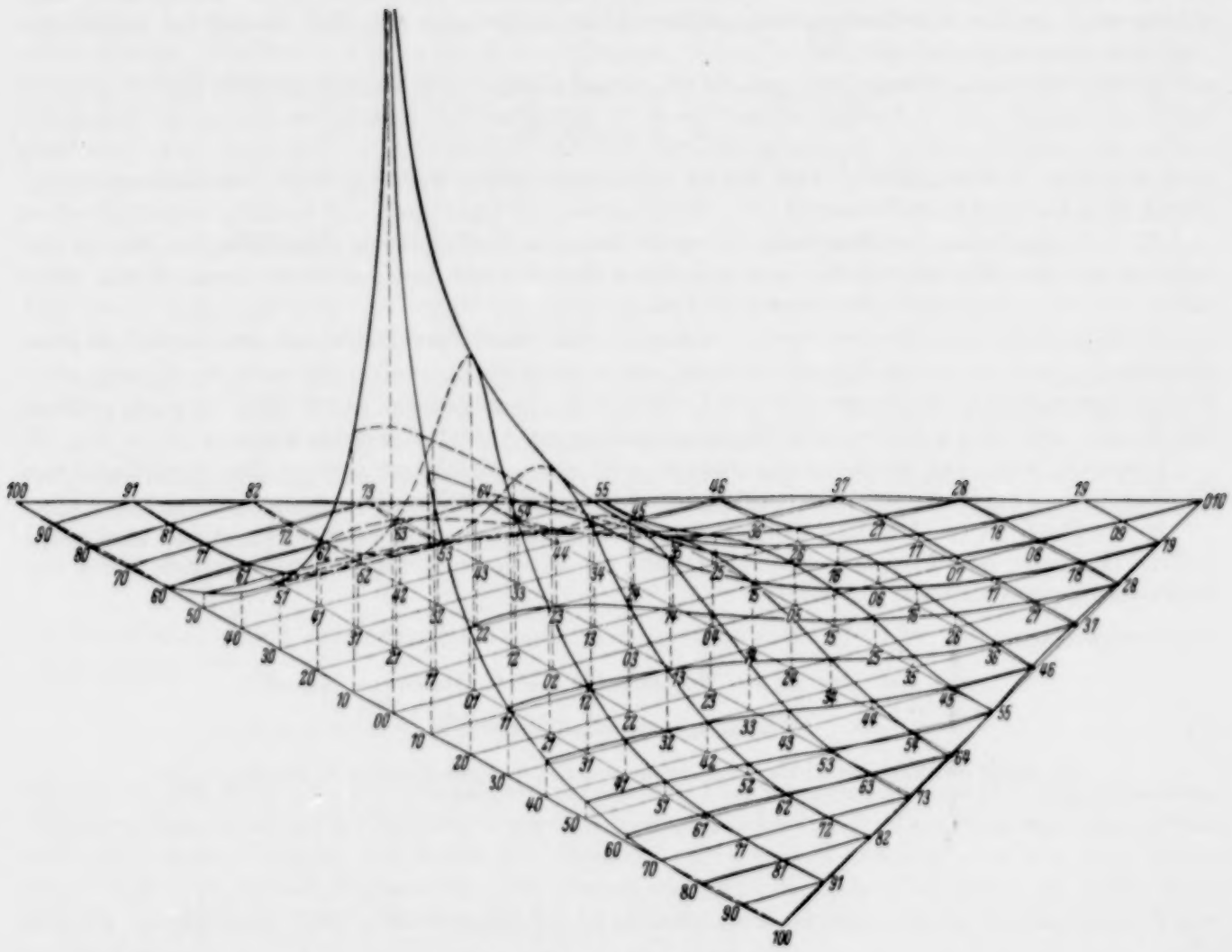

Abb. 10. Biegemomenteneinflußfläche.

1) die Durchbiegung w der Platte in Hypothenusenmitte unter einer dort angreifenden Einzelkraft P

$$w_{0\,p} = 0{,}0182\, a^2 \frac{P}{N},$$

2) die Durchbiegung $w_{0\,p}$ und das Biegemoment $M_{0\,x\,y}$ der Platte in Hypothenusenmitte unter einer über die gesamte Platte gleichmäßig verteilten Last q

$$w_{0\,p} = 0{,}00124\, a^4 \frac{q}{N},$$

$$M_{0\,q\,y} = 0{,}00685\, a^4 \frac{q}{N}.$$

7. Zusammenfassung. Nach einer Einführung in die Singularitätenmethode und die Herleitung der Fundamentalintegrale für die Schnittkrafteinflußflächen wird für den am freien Rand liegenden Aufpunkt das Fundamentalintegral der Biegeeinflußfläche aufgestellt. Dann wird das Verfahren von *F. Schultz-Grunow* zur Ermittlung von Einflußflächen umfangsgelagerter Platten bei von Rand zu Rand wechselnden Lagerungsbedingungen gezeigt, und insbesondere numerisch die Biege- und Momenteneinflußfläche einer Platte von der Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit eingespannten Katheten, freier Hypothenuse und dem Aufpunkt in der Mitte der letzteren ermittelt. Dazu muß die konforme Abbildung des Dreiecks auf den Einheitskreis durchgeführt werden.

Es zeigte sich, daß man für Platten mit freien Rändern bei der Ermittlung von Einflußflächen nach dem Verfahren von *F. Schultz-Grunow* gute Ergebnisse erhält, wenn auch der Rechenaufwand naturgemäß höher ist als bei anderen Lagerungsarten der Platte. Weitere Untersuchungen in Fortführung dieser Arbeit, die demnächst veröffentlicht werden, haben jedoch ergeben, daß sich der Rechenaufwand bei Berücksichtigung folgender Punkte wesentlich vermindern läßt.

1) Die Potentialanteile des Fundamentalintegrals werden nicht mehr als Funktionen des polygonalen Bereiches definiert, sondern im Einheitskreis gebildet. Die so gebildeten Funktionen sind in den Abbildungspunkten der Ecken nicht mehr singulär, so daß der sogenannte Singularitätenausgleich entfällt.

2) Die zur Verwendung gelangenden Bipotentialfunktionen werden gebildet als

$$\psi_n = x \cdot d\Phi_n/dx$$

und mit den Potentialfunktionen Φ_n so zusammengefaßt, daß die erste Randbedingung des freien Randes exakt erfüllt ist.

3) Die drei Ecken werden dicht nebeneinander im Einheitskreis abgebildet, so daß die Erfüllung der Randbedingung des eingespannten Randes nur noch etwa in einem Punkt nötig wird, um eine entsprechende Genauigkeit zu erreichen.

4) Wegen 2) sind die verwendeten Bipotential- und Potentialfunktionen in der zweiten Randbedingung des freien Randes orthongonal zueinander, so daß nicht mehr die Lösung eines Gleichungssystemes für die punktweise Erfüllung der Randbedingung erforderlich wird, sondern die Konstanten durch Bilden der Minimumsbedingung ermittelt werden können.

Dadurch wird das Rechnungsverfahren sehr stark abgekürzt und so die Ermittlung von Einflußflächen bei Platten mit freien Rändern der praktischen Nutzung zugänglicher gemacht.

Herrn Prof. Dr. *F. Schultz-Grunow*, der die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und wertvollste Hinweise bei ihrer Durchführung gab, sei an dieser Stelle der verbindlichste Dank des Verfassers zum Ausdruck gebracht.

Aus dem Institut für Mechanik der Techn. Hochschule Aachen

(Eingegangen am 22. Oktober 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Alfons Scherer*, Koblenz-Oberwerth, Goethestr. 10.

Grenzen des Tragflügelauftriebs

Von H. B. Helmbold

1. Einleitung. Die Grundlagen der quantitativen Theorie des Tragflügels endlicher Spannweite wurden 1918/19 von *L. Prandtl*[1] gelegt. Da zu jener Zeit die Auftriebszahlen praktisch verwendeter Tragflügelprofile den Wert $c_a = 2$ nie überschritten, war die linearisierte Form der Theorie für alle Anwendungen völlig ausreichend; gleichzeitig wurde die Auswertung der Theorie durch die Linearisierung wesentlich erleichtert. Dieser Stand der Dinge blieb lange Zeit unverändert, um so ist es ganz erklärlich, daß über der alltäglichen Anwendung und den Erfolgen der linearisierten Theorie die Tatsache, daß die Theorie in ihrer ursprünglichen Form hinsichtlich der zugelassenen Zirkulationsstärke keinen Einschränkungen unterliegt, allmählich aus den Augen verloren wurde. Inzwischen aber ist die Erzeugung bedeutend höherer Auftriebszahlen durch Absaugung oder durch Rotation des Flügelprofils in den Bereich des praktisch Möglichen gerückt. Für solche Probleme reicht die linearisierte Theorie nicht mehr ganz aus, und man muß deshalb zur ursprünglichen Form der Theorie zurückkehren. Man hat nur einige Einzelheiten der Theorie *Prandtls*, die in seiner Darstellung infolge Spezialisierung nicht in Erscheinung treten, wiederherzustellen, die seither hinzugekommenen Kenntnisse über den Endzustand des aufgerollten Wirbelbandes weit hinter dem Flügel mitzuberücksichtigen und einige naheliegende Folgerungen zu ziehen, um zu der Einsicht zu gelangen, daß der Steigerung des Zirkulationsauftriebs durch die Endlichkeit der Spannweite Grenzen gezogen sind. Die Erzeugung „unmittelbaren" Auftriebs durch Reaktion eines Blasstrahls bleibt hier außer Betracht.

2. Allgemeine Beziehungen. Weit hinter dem Tragflügel ist das System der freien Wirbel um den Winkel δ gegen die Richtung der ungestörten Parallelströmung (umgekehrte Flugrichtung) abwärts geneigt. Absolut — d. h. in einem Koordinatensystem, in dem die Luft in unendlicher Entfernung vom Wirbelsystem in Ruhe bleibt, — bewegt sich das Wirbelsystem senkrecht zu seiner Längserstreckung mit der Eigengeschwindigkeit w' abwärts. Bezeichnet V den Betrag der Fluggeschwindigkeit, so ist $w' = V \sin\delta$ und der mit der Vorwärtsbewegung des Tragflügels verbundene Längenzuwachs des Wirbelsystems in der Zeiteinheit gleich $V\cos\delta$. Bekanntlich findet man in großer Entfernung hinter dem Tragflügel die beiden Hälften der freien Wirbelfläche in zylindrischen Räumen, den Wirbelkernen, zu Spiralen aufgerollt. Die Absolutströmung außerhalb der Wirbelkerne ist eine ebene Strömung mit Abwärtsgeschwindigkeiten w parallel zu w' und Quergeschwindigkeiten v in Spannweitenrichtung. Wegen der angenähert schraubenförmigen Gestalt der Wirbellinien im Kerninnern herrscht dort auch noch eine stromabwärts gerichtete Längsgeschwindigkeit u.

Von einem zweiten, mit dem Tragflügel fest verbundenen Koordinatensystem aus betrachtet ist die Strömung stationär und besitzt weit hinter dem Tragflügel die Geschwindigkeitskomponenten $V\cos\delta + u$ in Längsrichtung des Wirbelsystems, v in Spannweitenrichtung und $V\sin\delta - w$ senkrecht zur Längsrichtung des Wirbelsystems nach aufwärts; wie schon angegeben verschwindet u außerhalb der Wirbelkerne. Damit wird das Quadrat der resultierenden Relativgeschwindigkeit weit hinter dem Tragflügel

$$V_\infty^2 = (V\cos\delta + u)^2 + v^2 + (V\sin\delta - w)^2 . \tag{1}$$

Der Druckunterschied zwischen dem Unendlichen stromabwärts (V_∞, p) und dem Unendlichen stromaufwärts (V, p_0) wird

$$p - p_0 = \varrho\,\frac{V^2 - V_\infty^2}{2} = \varrho\,V\,(w\sin\delta - u\cos\delta) - \varrho\,\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} . \tag{2}$$

Für $\delta = 0$ geht dies in die von *Prandtl* zwischen seinen Gleichungen (65) und (66) angeschriebene Gleichung über. Wird nun der Tragflügel von einer Kontrollfläche umschlossen, die aus zwei parallelen und zur Längserstreckung des freien Wirbelsystems senkrechten Ebenen weit vor und hinter dem Flügel sowie seitlich ringsum aus diese Ebenen verbindenden Abschlußflächen in großer Entfernung vom Flügel besteht[1], dann ergibt der Impulssatz als Komponenten der Luftkraft am Trag-

[1] *L. Prandtl*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., 1918 (1. Mitteilung), 1919 (2. Mitteilung).

flügel einen „Längsschub" parallel zur Längsrichtung des Wirbelsystems stromaufwärts

$$P_x = \int^{\infty} (p - p_0)\, dF + \int^{F_K} \varrho\, (V \cos\delta + u)\, u\, dF \tag{3}$$

und eine Querkraft senkrecht zur Verbindungsebene der Kernachsen (Schwerlinien der Wirbelkerne) nach oben

$$P_z = \int^{\infty} \varrho\, (V \cos\delta + u)\, w\, dF = \int^{\infty} \varrho\, V w \cos\delta\, dF + \int^{F_K} \varrho\, u\, w\, dF\,. \tag{4}$$

Hier bedeutet dF ein Flächenelement der Querebene, F_K die Querschnittsfläche der Wirbelkerne, und $\varrho\,(V\cos\delta + u)\,dF$ ist die in der Zeiteinheit durch dF hindurchtretende Masse. (Daß der „Längsschub" einen negativen Betrag erhalten wird, ist in diesem Stadium der Betrachtung noch nicht bekannt.) Durch Einsetzen von (2) in (3) erhält man

$$P_x = \int^{\infty} \varrho\, \left(V w \sin\delta - \frac{v^2 + w^2}{2}\right) dF + \int^{F_K} \varrho\, \frac{u^2}{2}\, dF\,. \tag{5}$$

Auftrieb und induzierter Widerstand, die Luftkraftkomponenten senkrecht und entgegengesetzt zur Fluggeschwindigkeit V, ergeben sich aus P_x und P_z in folgender Weise:

$$A = P_z \cos\delta + P_x \sin\delta\,, \qquad W_i = P_z \sin\delta - P_x \cos\delta\,. \tag{6}$$

Durch Elimination von P_x wird der Ausdruck für den Auftrieb auf die Form von *Prandtls* Gleichung (68),

$$A = \frac{P_z}{\cos\delta} - W_i \operatorname{tg}\delta \tag{7}$$

gebracht. (Der von *Prandtl* angegebene Ausdruck $A = \varrho V \int \Gamma\, dy - W_i \operatorname{tg}\delta$ folgt dann aus unseren späteren Gleichungen (15) und (20).) Die Kraft P_z läßt sich als Zuwachs des Querimpulses der Absolutbewegung in der Zeiteinheit auffassen; dann bedeutet $P_z/V\cos\delta$ den Querimpuls bezogen auf die Längeneinheit des Wirbelsystems. Einsetzen von (4) und (5) in die zweite Gleichung (6) ergibt den induzierten Widerstand

$$W_i = \int^{\infty} \varrho\, \frac{v^2 + w^2}{2} \cos\delta\, dF + \int^{F_K} \varrho\, \left(u\, w \sin\delta - \frac{u^2}{2} \cos\delta\right). \tag{8}$$

Dies unterscheidet sich von *Prandtls* Gleichung (67) durch das erste Glied im zweiten Integral. *Prandtl* konnte dieses Glied fortlassen, insofern bei der von ihm gemachten Annahme starrer Rotation in den Wirbelkernen das Integral $\int^{F_K} u\, w\, dF$ aus Symmetriegründen verschwindet. Daß die Kraft W_i wie stillschweigend vorausgesetzt tatsächlich einen Widerstand darstellt, ergibt sich aus der Energiebilanz der Absolutbewegung. Die kinetische Energie dieser Bewegung nimmt in der Zeiteinheit um $\int^{\infty} (V\cos\delta + u)\, \varrho\, \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\, dF$ zu, während die Drücke die Arbeit $\int^{F_K} (p - p_0)\, u\, dF$ leisten. Die Zunahme der Gesamtenergie je Zeiteinheit ist wegen (2)

$$E = V \int^{\infty} \varrho\, \frac{v^2 + w^2}{2} \cos\delta\, dF + V \int^{F_K} \varrho\, \left(u\, w \sin\delta - \frac{u_2}{2} \cos\delta\right) dF\,. \tag{9}$$

Der Vergleich mit (8) zeigt, daß $E = W_i V$ die Arbeitsleistung eines Widerstandes gegen die Vorwärtsbewegung des Tragflügels darstellt. Die Gesamtenergie bezogen auf die Längeneinheit des Wirbelsystems ist $\frac{E}{V\cos\delta} = \frac{W_i}{\cos\delta}$.

3. Ein Gedankenexperiment. Es ist bisher nicht gelungen, den Aufrollvorgang der freien Wirbelfläche von Anfang bis zu Ende exakt zu verfolgen. Wir werden deshalb so vorgehen, daß wir den Sonderfall eines Wirbelbandes betrachten, dessen Eigengeschwindigkeit längs seiner Quererstreckung (Spannweite) von Anfang an konstant ist, und das an der Verformung seines geradlinigen Querschnitts zunächst verhindert wird. Man mag sich das im Bilde eines in der Wirbelfläche liegenden, schwerelosen Bambusrollvorhangs vorstellen, dessen starre Stäbchen die Querschnitte des Wirbelbandes verkörpern. Nach Ablauf einer sehr langen Flugzeit reicht die Wirbelfläche soweit stromabwärts, daß sie weit hinter dem Flügel einen ebenen Streifen bildet. Jetzt wird die Wirbelfläche

freigegeben, indem — um im Bilde zu bleiben — der Bambusvorhang verdampft wird. Die grundlegende Annahme ist nun die, daß die stabile Endgestalt, der die freigegebene Wirbelfläche zustrebt, mit der Endgestalt der wirklichen Wirbelfläche, die schon am Flügel selbst sich aufzurollen beginnt, identisch ist. Da der Aufrollvorgang der hypothetischen Wirbelfläche weit hinter dem Flügel ohne Einwirkung äußerer Kräfte erfolgt, müssen der Querimpuls je Längeneinheit und die Gesamtenergie je Längeneinheit ebenso wie die Zirkulation um die beiden Hälften des Wirbelbandes erhalten bleiben. Dies sind die Invarianten des Problems. Auftrieb und induzierter Widerstand aber werden sich bei festgehaltener Zirkulationsverteilung längs der Flügelspannweite während der hypothetischen Verformung ändern, da dieser Vorgang im flügelfesten Koordinatensystem instationär verläuft (der wirkliche Aufrollvorgang ist auf den Flügel bezogen stationär). Da ferner alle notwendigen Angaben über das unverformte Wirbelsystem bekannt sind, braucht man nur noch die Eigengeschwindigkeit des fertig aufgerollten Wirbelsystems zu bestimmen, um die Luftkraft am Tragflügel zu ermitteln. Diese Bestimmung der Eigengeschwindigkeit ist beim gegenwärtigen Stand der Theorie zwar nur angenähert möglich, doch bleibt der Fehler voraussichtlich ganz unbedeutend. Eigengeschwindigkeit und Neigungswinkel des Wirbelsystems sind, wie sich ergeben wird, vor der Verformung größer als darnach [siehe Gleichung (19)].

4. Das unverformte Wirbelband. Um die im vorigen Abschnitt vorausgesetzte Konstanz der Eigengeschwindigkeit längs der Spannweite des Wirbelbandes zu erzielen, muß die Flügelzirkulation längs der Spannweite elliptisch verteilt sein:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2}\,; \tag{10}$$

y ist hier die Spannweitenkoordinate, b die Spannweite und Γ_0 das Maximum der Zirkulation in Spannweitenmitte $y = 0$. Dann ist die Eigengeschwindigkeit des Wirbelbandes weit hinter dem Flügel

$$w_0 = \frac{\Gamma_0}{b} \tag{11}$$

und der Abwindwinkel δ_0 des Wirbelbandes ist dort durch

$$\sin \delta_0 = \frac{w_0}{V} \tag{12}$$

bestimmt. Der Längenzuwachs des Wirbelbandes beträgt je Zeiteinheit $dx_0/dt = V \cos \delta_0$, und die scheinbare Masse des ebenen Wirbelbandes beträgt je Längeneinheit

$$\frac{dm}{dx_0} = \varrho \frac{\pi}{4} b^2 . \tag{13}$$

Demnach nimmt der Querimpuls je Zeiteinheit um

$$P_{z0} = \frac{dm}{dx_0} \frac{dx_0}{dt} w_0 = \varrho \frac{\pi}{4} b^2 V \cos \delta_0 \cdot w_0 \tag{14}$$

zu und beträgt je Längeneinheit

$$\frac{P_{z0}}{V \cos \delta_0} = \varrho \frac{\pi}{4} b^2 w_0 = \varrho \frac{\pi}{4} b \Gamma_0 = \varrho V \int \Gamma \, dy . \tag{15}$$

Da die Wirbellinien im unverformten System sämtlich einander parallel sind, verschwindet die Längskomponente u der Absolutgeschwindigkeit, und die kinetische Energie wird zur Gesamtenergie. Sie nimmt in der Zeiteinheit um

$$E_0 = \frac{dm}{dx_0} \frac{dx_0}{dt} \frac{w_0^2}{2} = \varrho \frac{\pi}{4} b^2 V \cos \delta_0 \cdot \frac{w_0^2}{2} \tag{16}$$

zu und beträgt je Längeneinheit

$$\frac{E_0}{V \cos \delta_0} = \varrho \frac{\pi}{4} b^2 \frac{w_0^2}{2} = \varrho \frac{\pi}{8} \Gamma_0^2 . \tag{17}$$

5. Das Wirbelsystem im Endzustand. Das fertig aufgerollte Wirbelband besteht aus zwei Wirbelkernen von entgegengesetzt gleicher Zirkulation Γ_0. Wie *A. Betz*[1] gezeigt hat, bleibt der gegenseitige Abstand der Schwerpunkte beider Hälften des Wirbelbandes während des Aufrollvorgangs konstant

[1] *A. Betz*, Z. angew. Math. Mech. **12** (1932) S. 164 = NACA-TM 713, 1933.

gleich

$$l = \frac{1}{\Gamma_0} \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y)\, dy = \frac{\pi}{4} b\,. \tag{18}$$

Nimmt man vereinfachend erst einmal wie *Prandtl* [Gleichung (64) und (72)] an, daß die Zirkulation in zwei Wirbellinien statt in Wirbelkernen endlichen Querschnitts konzentriert ist, dann ist

$$w' = \frac{\Gamma_0}{2\pi l} = \frac{2\Gamma_0}{\pi^2 b} = \frac{2}{\pi^2} w_0 \tag{19}$$

die Eigengeschwindigkeit des Wirbelpaars und die Stromlinien der Absolutbewegung sind Apollonische Kreise. Nun hat *Betz* vorgeschlagen, als Querschnittsform der Wirbelkerne Kreise anzunehmen, und *W. Kaufmann* [1] hat auf Grund der von *Betz* aufgestellten Sätze über Schwerpunkte und Trägheitsmomente der beteiligten Wirbelgruppen die Wirbelverteilung in den Kernen näher bestimmt, indem er die Spiralwindungen ebenfalls durch Kreise ersetzte. Damit ergaben sich die Wirbel in unmittelbarer Umgebung des Schwerpunktes und auf dem Kernrand auf den vorerwähnten Apolloniusschen Kreisen angeordnet. Das bedeutet aber, daß alle Stromlinien der Absolutbewegung außerhalb der Kerne ebenfalls Apolloniussche Kreise sind und die Gleichung (19) im Rahmen der *Betz-Kaufmann*schen Kreishypothese streng gültig bleibt. *Kaufmann* hat seine Theorie doppelt nachgeprüft: indem er die berechnete Druckverteilung mit Meßergebnissen verglich, und indem er numerische Übereinstimmung der berechneten Energie mit dem genauen Wert (17) nachwies [2]. Der bei der zweiten Kontrolle beobachtete Fehler von 1% wird darauf beruhen, daß er die von ihm gefundene Wirbelanordnung zum Zwecke einfacherer mathematischer Behandlung durchweg durch die nur wenig abweichende Anordnung auf Apollonischen Kreisen ersetzte. Trotz des Näherungscharakters der Kreishypothese wird man annehmen dürfen, daß (19) auch für die Eigengeschwindigkeit spiraliger Wirbelkerne eine genügend genaue Bestimmung liefert. Die Annahme wird weiter gestützt durch die numerischen Ergebnisse von *F. L. Westwater* [3], der den zweidimensionalen Aufrollvorgang für 20 Einzelwirbel untersuchte, die nach gleichen Inkrementen von $\Gamma(y)$ über die Spannweite des Ellipsenflügels verteilt waren. Den sehr günstig ausfallenden Vergleich dieser Ergebnisse mit der Aussage (19) veranschaulicht Abb. 6 von *Spreiter* und *Sacks* [4].

Da nun wie oben ausgeführt (Abschnitt 3) Querimpuls und Gesamtenergie je Längeneinheit für das unverformte und das aufgerollte Wirbelband übereinstimmen müssen, erhalten wir durch Einsetzen von (19) in (15) und (17), indem wir beachten, daß $w' = V \sin\delta$ ist, zunächst

$$\frac{P_z}{\cos\delta} = \frac{P_{z0}}{\cos\delta_0} = \varrho \frac{\pi^3}{8} b^2 V^2 \sin\delta \tag{20}$$

und

$$\frac{E}{V\cos\delta} = \frac{W_i}{\cos\delta} = \frac{E_0}{V\cos\delta_0} = \varrho \frac{\pi^5}{32} b^2 V^2 \sin^2\delta \tag{21}$$

und schließlich

$$W_i = \varrho \frac{\pi^5}{32} b^2 V^2 \sin^2\delta \cos\delta\,, \tag{22}$$

sowie wegen (7)

$$A = \varrho \frac{\pi^3}{8} b^2 V^2 \sin\delta \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \sin^2\delta\right). \tag{23}$$

Werden die letzten beiden Gleichungen durch $\frac{1}{2}\varrho V^2 b^2$ dividiert, so ergibt sich die dimensionslose Parameterdarstellung des Zusammenhanges zwischen Auftrieb und Widerstand (Abb. 1):

$$\frac{A}{\varrho \frac{V^2}{2} b^2} = \frac{c_a}{A} = \frac{\pi^3}{4} \sin\delta \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \sin^2\delta\right), \tag{24}$$

$$\frac{W_i}{\varrho \frac{V^2}{2} b^2} = \frac{c_{wi}}{A} = \frac{\pi^5}{16} \sin^2\delta \cos\delta\,, \tag{25}$$

---

[1] *W. Kaufmann*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Abt., 1946, S. 109.
[2] *W. Kaufmann*, Ing.-Arch. **17** (1949) S. 187.
[3] *F. L. Westwater*, Aer. Res. Comm., Rep. and Mem. 1692 (1935).
[4] *J. R. Spreiter — A. H. Sacks*, J. Aero Sci. **18** (1951) S. 21.

worin Λ das Seitenverhältnis bezeichnet. Der induzierte Anstellwinkel ist durch $W_i/A = c_{wi}/c_a = \operatorname{tg} a_i$ bestimmt. Die reduzierte Auftriebszahl c_a/Λ besitzt ein Maximum

$$\frac{c_{a\,lim}}{\Lambda} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = 1{,}90 \quad \text{für} \quad \sin\delta = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} = 0{,}368\,, \tag{26}$$

dem eine reduzierende Widerstandszahl

$$\frac{c_{wi}}{\Lambda} = \frac{\pi^2}{12}\sqrt{\pi^2 - \frac{4}{3}} = 2{,}40 \tag{27}$$

entspricht. Der Auftrieb verschwindet für $\sin\delta = \frac{2/\pi}{\pi} = 0{,}637$. Wenn diese Ergebnisse wegen der leichten Unsicherheit der Zahlenkonstanten von (19) auch noch nicht ganz als endgültig ange-

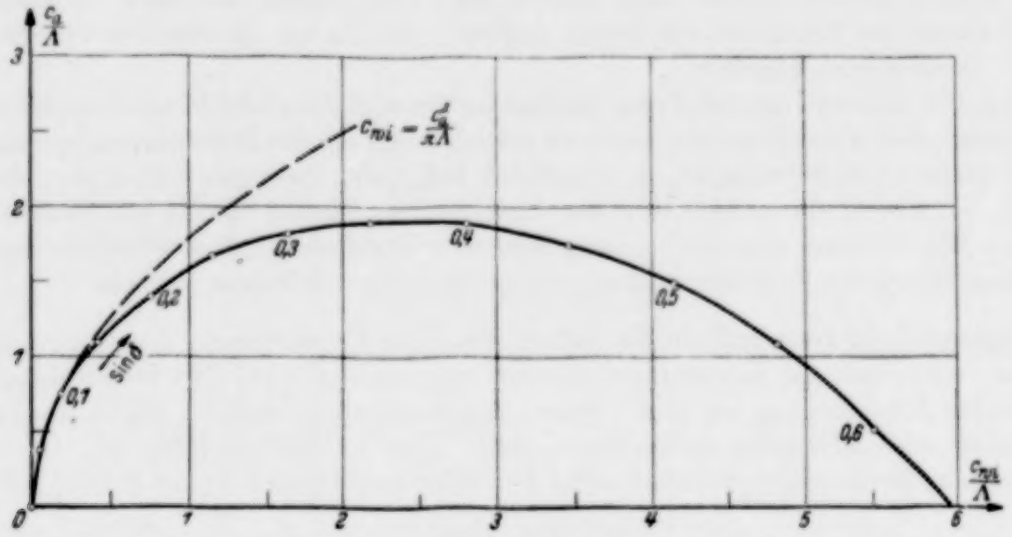

Abb. 1. Ideelle Polare des Tragflügels mit elliptischer Zirkulationsverteilung.

sehen werden dürfen, so genügen sie doch jedenfalls für den Nachweis einer Begrenzung des Auftriebs von Tragflügeln endlicher Spannweite. Experimentelle Auftriebswerte von Rotoren ohne Endscheiben bleiben durchweg unter der durch (26) angegebenen Grenze.

Für kleine Neigungswinkel δ gehen die Gleichungen (24) und (25) in

$$\frac{c_a}{\Lambda} = \frac{\pi^3}{4}\sin\delta \quad \text{und} \quad \frac{c_{wi}}{\Lambda} = \frac{\pi^5}{16}\sin^2\delta \tag{28}$$

über, woraus die bekannte Formel der linearisierten Theorie folgt:

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi\Lambda}\,. \tag{29}$$

In dieser Näherung wird

$$\sin\delta = \frac{4}{\pi^2}\operatorname{tg}\alpha_i = 0{,}405\operatorname{tg}\alpha_i\,. \tag{30}$$

(Eingegangen am 24. Oktober 1956.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *H. B. Helmbold*, R. D. 2, Greencastle, Pa. (USA).

Allgemeine Stabilitätstheorie der Schalen

Von G. Schwarze

1. Einleitung. Stabilitätsuntersuchungen aus dem Gebiet der Schalentheorie sind bisher für bestimmte Einzelprobleme durchgeführt worden. So wurde u. a. die Beulfestigkeit der Kugel- und Zylinderschale, der Kegelschale, sowie des Rotationsparaboloids in grundlegenden Arbeiten behandelt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine allgemeine Stabilitätstheorie für Schalen aufzustellen. Die allgemeinen Differentialgleichungen des Stabilitätsproblems und das zugehörige Variationsproblem werden mittels der auf dem Gebiet der Schalenstatik üblichen Methoden entwickelt. Allgemeine Theorien der Schalenstatik liegen bereits vor. Es wurde hier im wesentlichen auf Arbeiten von *W. Zerna* zurückgegriffen [1].

Die konsequente Anwendung der Tensorrechnung ermöglicht nicht nur, allgemeine Formeln von großer Durchsichtigkeit zu entwickeln, sondern erleichtert auch die Behandlung spezieller Probleme, was von umso größerer Bedeutung ist, als man sich bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System in erster Linie auf die Anschauung stützen mußte bei Nichtanwendung des Tensorkalküls. Die Lösung von Problemen, denen schiefwinklige Koordinaten zugrunde liegen, dürfte ohne Benutzung der Tensorrechnung auf große Schwierigkeiten stoßen.

2. Bezeichnungen und geometrische Grundbegriffe. Zur Beschreibung der Formänderungen wird ein raumfestes rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt. Zur Benennung der Schalenpunkte werden die Koordinaten vor der Verformung benutzt, so daß Θ_1, Θ_2 Θ_3 als körperfeste Koordinaten (Substanzkoordinaten) aufzufassen sind. Das Zahlentripel Θ_1, Θ_2, Θ_3 charakterisiert demnach einen ganz bestimmten Schalenpunkt bei jeder beliebigen Formänderung. Der Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\Theta_1\, \Theta_2)$$

beschreibt die Schalenmittelfläche. Θ_3 ist der Abstand eines Punktes von der Schalenmittelfläche und läuft im Intervall

$$-\frac{t}{2} \leqq \Theta_3 \leqq \frac{t}{2}\,.$$

Durch die Einschränkung von Θ_3 werden zwei weitere Flächen definiert, die Laibungen der Schale, deren Abstand, die Schalendicke t, gegenüber den übrigen Abmessungen der Schale als klein vorausgesetzt wird. Die Flächen werden dabei als doppelpunktfrei angenommen.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \Theta_3\, \mathfrak{a}$$

bezeichnet den Ortsvektor des Schalenraumes, wobei $\mathfrak{a}$ den Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale darstellt (Abb. 1).

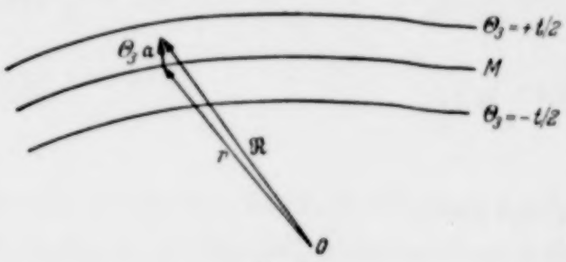

Abb. 1.

Nach der Definition geht der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ über in

$$\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v}_0\,,$$

wobei $\mathfrak{v}_0$ den Verschiebungsvektor der Mittelfläche darstellt mit

$$\mathfrak{v}_0 = v^\alpha\, \mathfrak{a}_\alpha + v\, \mathfrak{a} \qquad (\alpha = 1, 2)\,.$$

Die $\mathfrak{a}_\alpha$ sind die kovarianten Grundvektoren der Mittelfläche

$$\mathfrak{a}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \Theta_\alpha} = \mathfrak{r}_{1\alpha}\,.$$

Allgemein sollen griechische Indizes über 1, 2 laufen, während lateinische Indizes über 1, 2, 3 laufen.

3. Geometrie der deformierten Schale. Werden entsprechend $\bar{\mathfrak{r}}$ die auf die verformte Schale bezogenen Größen durch einen Querstrich gekennzeichnet, so folgt aus

$$\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v}_0\,, \tag{1}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}_\alpha = \left(\delta^\lambda_\alpha + v^\lambda\,{}^{0}\!|_\alpha - b^\lambda_\alpha\, r\right) \mathfrak{a}_\lambda + \left(b_{\alpha\beta}\, v^\beta + v_{,\alpha}\right) \mathfrak{a}\,, \tag{2}$$

[1] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 149; *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Quart. J. Mech. appl. Math. 3, (1950) S. 9; *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford 1954.

wobei $(\cdots)\overset{0}{|}_\alpha$ die kovariante Ableitung bezüglich der unverformten Schale definiert. Es ist

$$\delta_\alpha^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda = \alpha\,, \\ 0 & \text{für} \quad \lambda \neq \alpha\,. \end{cases}$$

Ebenso lassen sich alle weiteren Größen auf die entsprechenden Größen des unverformten Systems und den Verschiebungsvektor zurückführen. Dabei wird jeweils bei den linearen Gliedern der Verschiebungen abgebrochen, die zunächst bei der Stabilitätsuntersuchung nach der Gleichgewichtsmethode ausreichen.

Als Maßtensor der Fläche gilt

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathfrak{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathfrak{a}}_\beta = a_{\alpha\beta} + v_\alpha\overset{0}{|}_\beta + v_\beta\overset{0}{|}_\alpha - 2\,b_{\alpha\beta}\,r\,. \tag{3}$$

Weiter ist dann

$$\bar{a} = det\,\bar{a}_{\alpha\beta} = a\,(1 + 2\,v^\mu\overset{0}{|}_\mu - 2\,b_\mu^\mu\,v)\,, \tag{4}$$

$$\bar{a} = \frac{\bar{D}_{\alpha\beta}}{\bar{a}} = a^{\alpha\beta} - a^{\lambda\alpha}\,v^\beta\overset{0}{|}_\lambda - a^{\lambda\beta}\,v^\alpha\overset{0}{|}_\lambda + 2\,b^{\alpha\beta}\,v\,, \tag{5}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}^\beta = \bar{\mathfrak{a}}_\alpha \cdot \bar{a}^{\alpha\beta} = (\delta_\lambda^\beta - v^\beta\overset{0}{|}_\lambda + b_\lambda^\beta\,v)\,\mathfrak{a}^\lambda + (b_\lambda^\beta\,v^\lambda + a^{\lambda\beta}\,v_{,\alpha})\,\mathfrak{a}\,. \tag{6}$$

Als Flächennormalenvektor ergibt sich

$$\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\,(b_{\alpha\mu}\,v^\alpha + v_{1\mu})\,\mathfrak{a}^\mu\,. \tag{7}$$

Die Krümmungstensoren der Fläche und die Drei-Indizes-Symbole zweiter Art sind

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - v\,b_\alpha^\lambda\,b_{\lambda\beta} + v^\lambda\overset{0}{|}_\alpha\,b_{\lambda\beta} + v^\lambda\overset{0}{|}_\beta\,b_{\lambda\alpha} + v^\lambda\,b_{\lambda\alpha}\overset{0}{|}_\beta + v\overset{0}{|}_{\alpha\beta}\,, \tag{8}$$

$$\bar{b}_\beta^\alpha = b_\beta^\alpha + v\overset{0}{|}_{\gamma\beta}\,a^{\alpha\gamma} - v\,b_\beta^\lambda\,b_\lambda^\alpha + v^\lambda\overset{0}{|}_\beta\,b_\lambda^\alpha - v^\alpha\overset{0}{|}_\lambda\,b_\beta^\lambda + v^\varrho\,a^{\alpha\gamma}\,b_{\varrho\beta}\overset{0}{|}_\gamma + 2\,v\,b_{\beta\gamma}\,b^{\alpha\gamma}\,, \tag{9}$$

$$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + v^\alpha\overset{0}{|}_{\beta\gamma} - v\,b_\beta^\alpha\overset{0}{|}_\gamma - v^\varrho\,b_{\varrho\beta}\,b_\gamma^\alpha + v^\varrho\,b_{\beta\gamma}\,b_\varrho^\alpha - v_{,\gamma}\,b_\beta^\alpha - v_{,\beta}\,b_\gamma^\alpha + v_{,\varrho}\,a^{\varrho\alpha}\,b_{\beta\gamma}\,. \tag{10}$$

Der Ortsvektor des Schalenraumes ist für die verformte Schale

$$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{V} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \Theta_3 \cdot \mathfrak{a}\,.$$

Die geringe Schalenstärke ermöglicht, folgende Annahmen als hinreichende Annäherung für den Verformungszustand einzuführen:

1. Die bei der Verformung eintretende Verschiebung eines beliebigen Punktes sei durch die Verschiebung des zugehörigen Punktes der Mittelfläche derart bestimmt, daß die Normalen zur Mittelfläche auch nach der Verformung zur neuen Mittelfläche normal sind.

2. Die Spannungskompenente normal zur Mittelfläche sei so klein im Vergleich zu den anderen, daß ihr Einfluß auf die Formänderungen vernachlässigt werden kann.

Damit ergibt sich der Verschiebungsvektor $\mathfrak{V}$ in der Form

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{v}_0 + \Theta_3\,\mathfrak{w}$$

mit

$$\mathfrak{v}_0 = v_\alpha\,\mathfrak{a}^\alpha + v\,\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} = w_\alpha\,\mathfrak{a}^\alpha\,,$$

wobei $\mathfrak{w}$ die Drehung der Normalen angibt und parallel zur unverformten Mittelfläche verläuft, wenn die Komponente in Normalenrichtung gegenüber den übrigen Komponenten vernachlässigt wird.

Die $\mathfrak{w}$-Verschiebung läßt sich durch die Verschiebung der Mittelfläche ausdrücken:

$$w_\alpha = -\,v_{,\alpha} - b_\alpha^\varrho\,v_\varrho\,.$$

Damit wird

$$\mathfrak{V} = v_\alpha\,\mathfrak{a}^\alpha + v\,\mathfrak{a} - \Theta_3\,(v_{1\alpha} + b_\alpha^\varrho\,v_\varrho)\,\mathfrak{a}^\alpha\,.$$

Der Ortsvektor des Schalenraumes nimmt damit die Form an

$$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{r} + \Theta_3\,\mathfrak{a} + \mathfrak{v}_0 - \Theta_3\,(v_{1\alpha} + b_\alpha^\varrho\,v_\varrho)\,\mathfrak{a}^\alpha$$

oder

$$\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{r}} + \Theta_3\,\bar{\mathfrak{a}}\,. \tag{11}$$

Daraus lassen sich weitere Größen ableiten:

$$\bar{\mathfrak{g}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathfrak{R}}}{\partial \Theta_\alpha} = \bar{\mathfrak{a}}_\alpha - \Theta_3\, \bar{b}^\varrho_\alpha\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho = (\delta^\varrho_\alpha - \Theta_3\, \bar{b}^\varrho_\alpha)\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho\,,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}_3 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Theta_3} = \bar{\mathfrak{a}}\,.$$

Als Maßtensor des verformten Schalenraumes gilt

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta} &= \bar{a}_{\alpha\beta} - 2\,\Theta_3\, \bar{b}_{\alpha\beta} + \Theta_3^2\, \bar{b}^\varrho_\alpha\, \bar{b}_{\beta\varrho}\,, \\ \bar{g}_{\alpha 3} &= \bar{g}_{\beta 3} = 0\,, \quad \bar{g}_{33} = 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

entsprechend

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}^{\alpha\beta} &= \bar{a}^{\alpha\beta} + 2\,\Theta_3\, \bar{b}^{\alpha\beta} + 3\,\Theta_3^2\, \bar{b}^{\alpha\varrho}\, \bar{b}^\beta_\varrho + \cdots, \\ \bar{g}^{\alpha 3} &= \bar{g}^{\beta 3} = 0\,, \quad \bar{g}^{33} = 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

und es ist

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{a}}} = 1 - 2\,\Theta_3\, \bar{H} + \Theta_3^2\, \bar{K} \tag{14}$$

mit

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\,(\bar{b}^1_1 + \bar{b}^2_2)\,, \quad \bar{K} = \bar{b}^1_1\, \bar{b}^2_2 - \bar{b}^1_2\, \bar{b}^2_1\,.$$

4. Der Spannungszustand der verformten Schale. Die Spannung am verformten System wird definiert als das Verhältnis der auf ein Flächenelement wirkenden Kraft zu der Fläche des unverzerrten Elements.

Es sei $\bar{t}$ der Spannungsvektor der verformten Schale. Aus dem Kräftegleichgewicht an einem Tetraeder folgt dann unter Berücksichtigung der Spannungsdefinition

$$\bar{t}\, ds = \bar{t}_i\, ds_i\,,$$

wobei ds und ds_i die Flächen eines Tetraeders vor der Verformung darstellen.
Mit

$$ds_i = \sqrt{g^{ii}}\, n_i\, ds\,,$$

n_i als kovariante Komponenten des Normalenvektors zu ds, wird

$$\bar{t} = \Sigma\, t_i\, \sqrt{g^{ii}}\, n_i\,,$$

wobei $\bar{t}$ eine Invariante ist (Abb. 2).

Daraus folgt, daß sich $\bar{t}_i \sqrt{g^{ii}}$ verhalten muß wie ein kontravarianter Tensor.

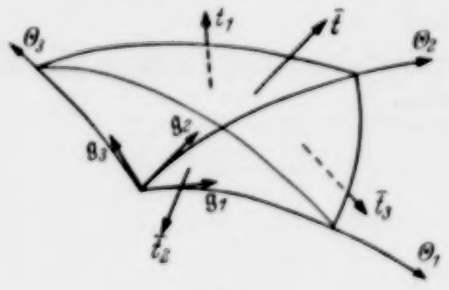

Abb. 2.

Ein Vergleich der Transformationsformeln für den Spannungszustand am verformten System einerseits und am starren Element andererseits liefert eine völlige formale Übereinstimmung der einzelnen Glieder bis auf bestimmte Koeffizienten der Spannungskomponenten

$$f_1(v) = 1 - \frac{1}{a_{11}}\,(v_1\,|^{\circ}_{1} - b_{11}\, v) \text{ bzw. } f_2(v) = 1 - \frac{1^1}{a_{22}}\,(v_2\,|^{\circ}_{2} - b_{22}\, v)\,,$$

die bei der Betrachtung am verformten System zusätzlich auftreten[1].

Daraus folgt zunächst, daß bei Berücksichtigung der Verformungen die Spannungskomponenten $\bar{\tau}^{\alpha\beta}$ keine Tensoren mehr sind.

Durch Einführung neuer Spannungsgrößen $\bar{\tau}^{\alpha\beta}_*$ ergibt sich aber wieder ein kontravarianter Tensor. Die Größen $\bar{\tau}^{\alpha\beta}_*$ sind nach den Transformationsformeln definiert durch

$$\bar{\tau}^{11}_* = f_1(v)\, \bar{\tau}^{11}\,, \quad \bar{\tau}^{12}_* = f_2(v)\, \bar{\tau}^{12}\,, \quad \bar{\tau}^{21}_* = f_1(v)\, \bar{\tau}^{21}\,, \quad \bar{\tau}^{22}_* = f_2(v)\, \bar{\tau}^{22} \tag{15}$$

mit

$$f_\Phi = 1 - \frac{1}{a_{\Phi\Phi}}\,(v_\Phi\,|^{\circ}_{\Phi} - b_{\Phi\Phi}\, v)\,, \tag{16}$$

wobei über große griechische Indizes nicht summiert werden soll.

Bei Vernachlässigung der Verformungen gehen die Größen $\bar{\tau}^{\alpha\beta}_*$ und $\bar{\tau}^{\alpha\beta}$ wieder in $\tau^{\alpha\beta}$ über.

[1] Vgl. *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin 1950.

Mit $\sqrt{g^{ii}\, g}\, \bar{t}_i = \bar{\mathfrak{T}}_i$ ergibt sich als Momentengleichgewichtsbedingung

$$\bar{\mathfrak{g}}_i \times \bar{\mathfrak{T}}_i = 0 \,.$$

Daraus folgt

$$\bar{\tau}_*^{12} = \bar{\tau}_*^{21} \,, \quad \bar{\tau}_*^{13} = \bar{\tau}_*^{31} \,, \quad \bar{\tau}_*^{23} = \bar{\tau}_*^{32} \,.$$

Der Tensor $\bar{\tau}_*^{ik}$ ist demnach symmetrisch.

Die einander zugeordneten Schubspannungen $\bar{\tau}^{ik}$ und $\bar{\tau}^{ki}$ dagegen sind nicht gleich.

Damit ergibt sich dann

$$\bar{t}_i \sqrt{g^{ii}} = \bar{\tau}_*^{ik}\, \bar{\mathfrak{g}}_k$$

oder

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, \bar{\tau}_*^{i\alpha}\, (\delta_\alpha^\varrho - \Theta_3\, \bar{b}_\alpha^\varrho)\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho + \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, \bar{\tau}_*^{i3}\, \bar{\mathfrak{a}} \,.$$

Mit

$$\bar{\sigma}_*^{i\varrho} = (\delta_\alpha^\varrho - \Theta_3\, \bar{b}_\alpha^\varrho)\, \bar{\tau}_*^{i\alpha}$$

wird

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, (\bar{\sigma}_*^{i\varrho}\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho + \bar{\tau}_*^{i3}\, \bar{\mathfrak{a}}) \,.$$

Infolge der geringen Schalenstärke läßt sich der Spannungszustand insofern vereinfachen, als man auf die genaue Kenntnis der Verteilung der Kräfte über die Schalendicke verzichtet und sich auf ihre Resultierenden und auf die resultierenden Momente bezüglich einer in der Mittelfläche liegenden Achse beschränkt. Wird normal zur Mittelfläche ein Schnitt durch die Schale gelegt, so hat man, um die in der ganzen Schnittfläche übertragene Kraft zu bestimmen, die Summe der Spannungsvektoren zu bilden. Macht man sich von der Länge des Schnittes frei, indem man die in dem Schnitt übertragene Kraft auf die unverformte Längeneinheit der Schnittlinie mit der Mittelfläche bezieht, so verbleibt eine Integration der Spannungsvektoren über die Schalendicke t.

Die Gesamtkraft, die an der Fläche $\Theta_\alpha = \text{konst.}$ angreift, ist

$$\bar{\mathfrak{n}}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a\, a^{\alpha\alpha}}} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{g}\, (\bar{\sigma}_*^{\alpha\varrho}\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho + \bar{\tau}_*^{\alpha 3}\, \bar{\mathfrak{a}})\, d\Theta^3 \,,$$

und mit

$$\bar{\mathfrak{n}}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a\, a^{\alpha\alpha}}}\, \bar{\mathfrak{N}}_\alpha$$

wird

$$\bar{\mathfrak{N}}_\alpha = \bar{\mathfrak{a}}_\varrho \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{g}\, \bar{\sigma}_*^{\alpha\varrho}\, d\Theta^3 + \bar{\mathfrak{a}} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{g}\, \bar{\tau}_*^{\alpha 3}\, d\Theta^3 \,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\, \bar{\mathfrak{N}}_\alpha = \bar{\mathfrak{a}}_\varrho \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \bar{\sigma}_*^{\alpha\varrho}\, d\Theta^3 + \bar{\mathfrak{a}} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \bar{\tau}_*^{\alpha 3}\, d\Theta^3$$

Mit

$$\bar{n}^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \bar{\sigma}_*^{\alpha\varrho}\, d\Theta^3 \tag{17}$$

als Längskrafttensor und

$$\bar{q}^\alpha = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \bar{\tau}_*^{\alpha 3}\, d\Theta^3 \tag{18}$$

als Querkraftvektor wird

$$\bar{\mathfrak{N}}_\alpha = \sqrt{a}\, \bar{n}^{\alpha\varrho}\, \bar{\mathfrak{a}}_\varrho + \sqrt{a}\, \bar{q}^\alpha\, \bar{\mathfrak{a}} \,.$$

Durch

$$\sqrt{a}\, \bar{n}^{\alpha\varrho} = \frac{\sqrt{a}}{f(v)}\, \bar{n}^{\alpha\varrho} = \bar{N}^{\alpha\varrho} \tag{19}$$

$$\sqrt{a}\, \bar{q}^\alpha = \frac{\sqrt{a}}{f(v)}\, \bar{q}^\alpha = \bar{Q}^\alpha \tag{20}$$

mit

$$f(v) = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} = 1 + v^{\mu}\,\overset{0}{|}_{\mu} - b^{\mu}_{\mu}\, v \tag{21}$$

ergibt sich

$$\bar{\mathfrak{N}}_{\alpha} = \bar{N}^{\alpha\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}_{\varrho} + \bar{Q}^{\alpha}\,\bar{\mathfrak{a}}\,.$$

Mit $\bar{\mathfrak{N}}_{\alpha} = \sqrt{a\,a^{\alpha\alpha}}\,\bar{\mathfrak{n}}_{\alpha}$ folgen die Schnittgrößen

$$\bar{\mathfrak{n}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}}\,(\bar{n}^{\alpha\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}_{\varrho} + \bar{q}^{\alpha}\,\bar{\mathfrak{a}})\,. \tag{22}$$

Infolge der Verschiebung der Kraft tritt ein Moment auf mit dem Hebelarm $\Theta_3\,\bar{\mathfrak{a}}$

$$\bar{\mathfrak{m}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a\,a^{\alpha\alpha}}} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{g}\,\bar{\mathfrak{a}} \times (\bar{\sigma}^{\alpha\varrho}_{*}\,\bar{\mathfrak{a}}_{\varrho} + \bar{\tau}^{\alpha 3}_{*} \cdot \bar{\mathfrak{a}})\,\Theta_3\,d\Theta^3\,.$$

Mit

$$\bar{\mathfrak{m}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a\,a^{\alpha\alpha}}}\,\bar{\mathfrak{M}}_{\alpha}$$

wird daraus

$$\bar{\mathfrak{M}}_{\alpha} = \bar{\mathfrak{a}} \times \bar{\mathfrak{a}}_{\varrho} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{g}\,\bar{\sigma}^{\alpha\varrho}_{*}\,\Theta_3\,d\Theta^3\,.$$

Mit

$$\bar{\mathfrak{a}} \times \bar{\mathfrak{a}}_{\varrho} = \bar{\varepsilon}_{\varrho\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}^{\lambda} \quad \text{bei} \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \\ \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = \sqrt{\bar{a}} \end{cases}$$

und

$$\bar{m}^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\,\bar{\sigma}^{\alpha\varrho}_{*}\,\Theta_3\,d\Theta^3 \tag{23}$$

als Momententensor wird

$$\bar{\mathfrak{M}}_{\alpha} = \sqrt{a}\,\bar{m}^{\alpha\varrho}\,\bar{\varepsilon}_{\varrho\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}^{\lambda} \quad \text{oder} \quad \bar{\mathfrak{M}}_{\alpha} = \bar{M}^{\alpha\varrho}\,\bar{\varepsilon}_{\varrho\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}^{\lambda}\,,$$

wobei

$$\sqrt{a}\,\bar{m}^{\alpha\varrho} = \frac{\sqrt{\bar{a}}}{f(v)}\,\bar{m}^{\alpha\varrho} = \bar{M}^{\alpha\varrho} \tag{24}$$

ist. Damit wird dann

$$\bar{\mathfrak{m}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}}\,\bar{m}^{\alpha\varrho}\,\bar{\varepsilon}_{\varrho\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}^{\lambda}\,. \tag{25}$$

5. Gleichgewicht der deformierten Schale. Infolge der Beschränkung des Stabilitätsproblems auf die Ermittlung der für die Bemessung eines Systems maßgeblichen kritischen Belastungen, die durch die Bedingung des indifferenten Gleichgewichts geliefert werden, können die Verformungen des Grundzustands vernachlässigt werden.

Im Falle des indifferenten Gleichgewichtszustandes muß sich auch das durch bestimmte virtuelle Verrückungen $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}_3$ verformte System unter dem vorliegenden Spannungszustand im Gleichgewicht befinden. Dabei wird unter einer virtuellen Verrückung die erste Variation eines Verformungszustandes verstanden.

Im Anschluß an die übliche Bezeichnungsweise soll der durch bestimmte, unendlich kleine Veränderungen des Verformungszustands erreichte „Nachbarzustand" durch den Index I gekennzeichnet werden. während der auf die Art seines Gleichgewichts hin zu untersuchende „Grundzustand" den Index 0 erhält. Der Nachbarzustand ist dann gleich dem Grundzustand plus dessen erster Variation, z. B. für die Längskräfte

$$n_I^{\alpha\beta} = n_0^{\alpha\beta}\,F(\tilde{v}) + \tilde{n}^{\alpha\beta} = n_{0*}^{\alpha\beta} + \tilde{n}^{\alpha\beta}\,,$$

wobei $(\tilde{\ }\,.)$ andeutet, daß es sich um eine virtuelle Verschiebung bzw. die erste Variation des Grundzustands handelt.

Damit läßt sich das Kriterium für das indifferente Gleichgewicht folgendermaßen formulieren: Ein Gleichgewichtszustand ist indifferent, wenn es mindestens eine spezielle Variation des Verformungszustands gibt, nach deren Ausführung die Gleichgewichtsbedingungen auch noch für den Nachbarzustand ohne Änderung der Belastung des Systems erfüllt sind[1].

[1] Vgl. *A. Pflüger*, a. a. O.

Dabei ist in (26)

$$F(\bar{v}) = f_B = 1 - \frac{1}{a_{BB}} (\bar{v}_B{}^{|\alpha}{}_{|B} - b_{BB}\,\bar{v}) \,. \tag{27}$$

Der Faktor $F(\bar{v})$ resultiert aus der Tatsache, daß die Schnittgrößen $n_0^{\alpha\beta}$ des Grundzustands innerhalb von (22) auf die Grundvektoren $\mathfrak{a}_{\beta I}$ des Nachbarzustands bezogen sind. Nach (22) ist nämlich für den Nachbarzustand

$$\mathfrak{n}_{\alpha I} = \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} (n_I^{\alpha\varrho}\,\mathfrak{a}_{\varrho I} + q_I^{\alpha}\,\mathfrak{a}_I) \,.$$

Daraus folgt zunächst, daß für die $n_0^{\alpha\beta}$ bezogen auf $\mathfrak{a}_{\beta I}$ kein Tensor mehr existiert. Durch Einführung neuer Schnittgrößen $n_{0*}^{\alpha\beta}$ ergibt sich aber wieder ein kontravarianter Längskrafttensor.
Es ist

$$n_{0*}^{\alpha\beta} = F(\bar{v})\, n_0^{\alpha\beta} \,. \tag{28}$$

Durch die virtuellen Verrückungen $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ entstehen also in der Schale zusätzliche Schnittgrößen zu den schon vorhandenen Schnittgrößen des Grundzustands. Um festzustellen, ob die verformte Schale im Gleichgewicht ist, müssen diese neuen Größen mit in die Gleichgewichtsbedingungen genommen werden. Da aber die zusätzlichen Spannungen beliebig klein sein können, so sind die neu in die Gleichungen eintretenden Glieder klein gegen die schon vorhandenen, und es müssen, wenn es schon auf Glieder dieser Größenordnung ankommt, auch die Produkte aus den $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ mit den Schnittgrößen des Grundzustands berücksichtigt werden, die dadurch entstehen, daß diese Größen jetzt nicht mehr an dem ursprünglichen Schalenelement angreifen, sondern an dem durch zusätzliche Formänderungen verzerrten Element. Es treten also zweierlei Zusatzglieder in den Gleichgewichtsbedingungen auf. Da die Gleichgewichtsbedingungen auch ohne diese Glieder schon befriedigt waren, so müssen diese für sich gleich Null sein, und da sich die Schnittgrößen linear und homogen mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes durch die Verschiebungen ausdrücken lassen, so ergeben sich lineare homogene Differentialgleichungen für $\bar{v}_1$ v_2, $\bar{v}_3$.

Bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist zu beachten, daß zwar Glieder von der Größenordnung der linearen Anteile der zusätzlichen Verschiebungen berücksichtigt werden müssen, jedoch Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können.

Die Gleichgewichtsbedingungen werden für den Nachbarzustand in Richtung der verformten Achsen aufgestellt. Das Gleichgewicht der Kräfte ist nach Abb. 3

$$\mathfrak{N}_{I\,\alpha,\alpha} + \mathfrak{p}_I \sqrt{a} = 0 \,. \tag{29}$$

Das Gleichgewicht der Momente bezogen auf den Schwerpunkt des Flächenelementes ist

$$\mathfrak{M}_{I\,\alpha,\alpha} + \bar{\mathfrak{a}}_\alpha\, \mathfrak{N}_{I\,\alpha} = 0 \,. \tag{30}$$

Die Kräfte aus der äußeren Belastung sind dabei $\mathfrak{p}_I \sqrt{a}$, wenn die Spannung als Kraft pro unverzerrter Fläche definiert wird.

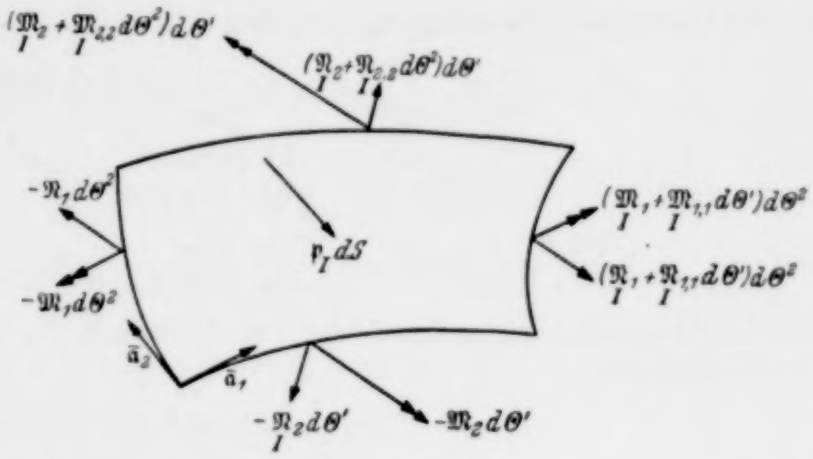

Abb. 3.

Werden die Vektorgleichungen in Komponenten zerlegt, so gilt mit

$$\mathfrak{N}_{I\,\alpha} = N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}_\varrho + Q_I^\alpha\,\bar{\mathfrak{a}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_I = p_I^\lambda\,\bar{\mathfrak{a}}_\lambda + p_I^3\,\bar{\mathfrak{a}}$$

$$N_{I,\alpha}^{\alpha\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}_\varrho + N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{\mathfrak{a}}_{\varrho,\alpha} + \bar{Q}_{I,\alpha}^{\alpha}\,\bar{\mathfrak{a}} + \bar{Q}_I^\alpha\,\bar{\mathfrak{a}}_{,\alpha} + \sqrt{a}\,(p_I^\lambda\,\bar{\mathfrak{a}}_\lambda + p_I^3\,\bar{\mathfrak{a}}) = 0 \,,$$

$$(N_{I,\alpha}^{\alpha\lambda} + N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{\Gamma}_{\alpha\varrho}^{\lambda} - Q_I^\alpha\,\bar{b}_\alpha^\lambda + \sqrt{a}\,p_I^\lambda)\,\bar{\mathfrak{a}}_\lambda + (N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{b}_{\varrho\alpha} + Q_{I,\alpha}^{\alpha} + \sqrt{a}\,p_I^3)\,\bar{\mathfrak{a}} = 0 \,.$$

Jede Komponente muß für sich verschwinden. Also ist

$$N_{I,\alpha}^{\alpha\lambda} + N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{\Gamma}_{\alpha\varrho}^{\alpha} - Q_I^\alpha\,\bar{b}_\alpha^\lambda + \sqrt{a}\,p_I^\lambda = 0 \,,$$

$$N_I^{\alpha\varrho}\,\bar{b}_{\varrho\alpha} + Q_{I,\alpha}^{\alpha} + \sqrt{a}\,p_I^3 = 0 \,.$$

Mit (19) und (20) ergibt sich dann

$$\frac{1}{f(v)}\, n_I^{\alpha\lambda}{}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, n_I^{\alpha\lambda} - \frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_\alpha^\lambda\, q_I^\alpha + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^\lambda = 0\,, \tag{31}$$

$$\frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\, n_I^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v)}\, g_I^\alpha{}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, q_I^\alpha + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^3 = 0\,. \tag{32}$$

Mit

$$\mathfrak{M}_{I\,\alpha} = M_I^{\alpha\varrho}\;\bar{\mathfrak{a}} \times \bar{\mathfrak{a}}_\varrho$$

ergibt sich aus (30)

$$M_{I,\alpha}^{\alpha\beta} + \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^{\beta}\, M_I^{\lambda\alpha} - Q_I^\beta = 0\,,$$

und mit (20) und (24) folgt

$$\frac{1}{f(v)}\, m_I^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\alpha\beta} - \frac{1}{f(v)}\, q_I^\beta = 0\,. \tag{33}$$

Durch Elimination der Querkräfte läßt sich die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen auf drei reduzieren:

$$\frac{1}{f(v)}\, n_I^{\alpha\lambda}{}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, n_I^{\alpha\lambda} - b_\alpha^\lambda \frac{1}{f(v)}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + b_\alpha^\lambda \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^\lambda = 0\,, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\, n_I^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v)}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta\alpha} - \frac{1}{f(v)}\left(\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{f(v)}\right)_{|\alpha} m_I^{\beta\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\alpha} \\ - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v)]^3}\, m_I^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^3 = 0\,.\end{aligned} \tag{35}$$

Der Grundzustand soll im folgenden noch etwas ausführlicher untersucht werden. Und zwar sei zunächst der Grundzustand als Biegespannungszustand angenommen, wobei also auch die Verformung des Grundzustands berücksichtigt werden muß.

Als Anfangszustand hat man also jetzt nicht den unverzerrten Zustand anzusehen, sondern denjenigen durch gewisse Werte der äußeren Belastung hervorgerufenen Spannungszustand 0, bei dem ein unendlich benachbarter Gleichgewichtszustand I möglich sein soll. Die kovariante Ableitung $(\ldots)^{0}_{|}$ soll sich hier also ausnahmsweise auf die im Grundzustand verformte Schale beziehen.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Grundzustand sind nach (34) und (35)

$$\frac{1}{f(v_0)}\, n_0^{\alpha\lambda}{}^{0}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v_0)]^2}\, n_0^{\alpha\lambda} - \bar{b}_\alpha^\lambda \frac{1}{f(v_0)}\, m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\beta} + \bar{b}_\alpha^\lambda \frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v_0)]^2}\, m_0^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_0^\lambda = 0\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(v_0)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\, n_0^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v_0)}\, m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\beta\alpha} - \frac{1}{f(v_0)}\left\{\frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{f(v_0)}\right\}^{0}_{|\alpha} m_0^{\beta\alpha} - \frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v_0)]^2}\, m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\alpha} \\ - \frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v_0)]^2}\, m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\beta} + \frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{\partial f(v_0)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v_0)]^3}\, m_0^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_0^3 = 0\,.\end{aligned}$$

Werden die quadratischen Anteile der Verschiebungen des Grundzustands vernachlässigt, so gelten die Gleichungen

$$n_0^{\alpha\lambda}{}^{0}_{|\alpha} - b_\alpha^\lambda\, m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\beta} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_0^\lambda = 0\,, \tag{36}$$

$$b_{\varrho\alpha} n_0^{\alpha\varrho} + m_0^{\beta\alpha}{}^{0}_{|\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_0^3 = 0\,. \tag{37}$$

Der eigentlichen Stabiltätsuntersuchung geht die Bestimmung der Lösungen des Grundzustands voraus.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Nachbarzustand sind dann

$$\frac{1}{f(v)}\, n_I^{\alpha\lambda}{}_{|\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, n_I^{\alpha\lambda} - \bar{b}_\alpha^\lambda \frac{1}{f(v)}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + \bar{b}_\alpha^\lambda \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^\lambda = 0\,, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\, n_I^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v)}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta\alpha} - \frac{1}{f(v)}\left\{\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{f(v)}\right\}_{|\alpha} m_I^{\beta\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\beta} \\ - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^2}\, m_I^{\beta\alpha}{}_{|\alpha} + \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\beta}\,\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_\alpha}\,\frac{1}{[f(v)]^3}\, m_I^{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\; p_I^3 = 0\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Wird durch die Beziehung (26) der Grundzustand in die Gleichgewichtsbedingungen eingeführt, so ergibt sich bei Vernachlässigung aller quadratischen Anteile der Verschiebungen

$$\tilde{n}^{\alpha\lambda}\,{}^{0}|_{\alpha} + \frac{1}{f(v)}\,n^{\alpha\lambda}_{0\bullet}\,|_{\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\alpha}}\,n^{\alpha\lambda}_{0\bullet} - b^{\lambda}_{\alpha}\,\tilde{m}^{\beta\alpha}\,{}^{0}|_{\beta} - \bar{b}^{\lambda}_{\alpha}\,\frac{1}{f(v)}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet}\,|_{\beta} + b^{\lambda}_{\alpha}\,\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\beta}}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\;p^{\lambda}_{I} = 0\,, \tag{40}$$

$$b_{\varrho\alpha}\,\tilde{n}^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\,n^{\alpha\varrho}_{0\bullet} + \tilde{m}^{\beta\alpha}\,{}^{0}|_{\beta\alpha} + \frac{1}{f(v)}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet}\,|_{\beta\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\beta}}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet}\,|_{\alpha} - \frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\alpha}}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet}\,|_{\beta} - \left\{\frac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\beta}}\,\frac{1}{f(v)}\right\}|_{\alpha}\,m^{\beta\alpha}_{0\bullet} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\;p^{3}_{I} = 0\,. \tag{41}$$

Werden durch (26) die Verschiebungen des Grundzustands eingeführt, die im allgemeinen recht komplizierte Funktionen von Θ_{α} sind, während andererseits die Kräfte und Momente des Grundzustands durch das Elastizitätsgesetz mit den Verschiebungen des Grundzustands verbunden sind, so ist ersichtlich, daß in bezug auf die praktische Brauchbarkeit die Zugrundelegung des Biegespannungszustandes als Grundzustand zu einem unmöglichen Arbeitsaufwand führt. Deshalb wird der Grundzustand in erster Annäherung durch einen Membranspannungszustand wiedergegeben. Diese Annahme setzt bezüglich der Randbedingungen voraus, daß bis zur Erreichung der Stabilitätsgrenze die Verschiebungen der Schale ungehindert vor sich gehen können. Eine Behinderung der Verschiebungen am Rande bewirkt ein Herabsinken der Tragfähigkeit, was zu einem Biegungsbruch vor Erreichen der kritischen Last führen kann.

Wird der Membranspannungszustand zugrunde gelegt, d. h. sind die

$$m^{\alpha\beta}_{0} = 0\,,$$

und wird die Verformung des Grundzustands vernachlässigt, so vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\tilde{n}^{\alpha\lambda}\,{}^{0}|_{\alpha} + \frac{1}{f(v)}\,n^{\alpha\lambda}_{0\bullet}\,|_{\alpha} - n^{\alpha\lambda}_{0}\,{}^{0}|_{\alpha} - f_{1\alpha}\,n^{\alpha\lambda}_{0\bullet} - b^{\lambda}_{\alpha}\,\tilde{m}^{\beta\alpha}\,{}^{0}|_{\beta} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\;p^{\lambda}_{I} - p^{\lambda}_{0} = 0\,, \tag{42}$$

$$b_{\varrho\alpha}\,\tilde{n}^{\alpha\varrho} + \frac{1}{f(v)}\,\bar{b}_{\varrho\alpha}\,n^{\alpha\varrho}_{0\bullet} - b_{\varrho\alpha}\,n^{\alpha\varrho}_{0} + \tilde{m}^{\beta}{}_{\alpha}\,{}^{0}|_{\beta\alpha} + \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\;p^{3}_{I} - p^{3}_{0} = 0\,, \tag{43}$$

wobei $f_{,\alpha} = \dfrac{\partial f(v)}{\partial \Theta_{\alpha}}$ bezeichnet. Dabei wurde bereits berücksichtigt, daß die Gleichgewichtsbedingungen für den Grundzustand für sich gleich Null sind.

Der Belastungsvektor, bezogen auf die Einheit der unverformten Mittelfläche, sei gegeben durch

$$\mathfrak{p} = p^{\alpha}\,\mathfrak{a}_{\alpha} + p^{3}\,\mathfrak{a}\,. \tag{44}$$

Bei Deformation der Schale ist dementsprechend

$$\bar{\mathfrak{p}} = \bar{p}^{\alpha}\,\bar{\mathfrak{a}}_{\alpha} + \bar{p}^{3}\,\bar{\mathfrak{a}}\,. \tag{45}$$

Mit

$$\mathfrak{a}_{\alpha} = (\delta^{\lambda}_{\alpha} - v^{\lambda}\,{}^{0}|_{\alpha} + v\,b^{\lambda}_{\alpha})\,\bar{\mathfrak{a}}_{\lambda} - (v^{\beta}\,b_{\alpha\beta} + v_{,\alpha})\,\bar{\mathfrak{a}}$$

und

$$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}} + (v^{\alpha}\,b_{\alpha\mu} + v_{1\mu})\,\bar{\mathfrak{a}}^{\mu}$$

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\bar{p}^{\lambda} &= p^{\alpha}\,(\delta^{\lambda}_{\alpha} - v^{\lambda}\,{}^{0}|_{\alpha} + v\,b^{\lambda}_{\alpha}) + p^{3}\,(v^{\alpha}\,b^{\lambda}_{\alpha} + a^{\lambda\mu}\,v_{,\mu})\,,\\ \bar{p}^{3} &= p^{3} - p^{\alpha}\,(v^{\beta}\,b_{\alpha\beta} + v_{1\alpha})\,.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die Belastungsgrößen für den Nachbarzustand sind dann

$$\left.\begin{aligned}p^{\lambda}_{I} &= p^{\alpha}_{0}\,(\delta^{\lambda}_{\alpha} - \tilde{v}^{\lambda}\,{}^{0}|_{\alpha} + \tilde{v}\,b^{\lambda}_{\alpha}) + p^{3}_{0}\,(\tilde{v}^{\alpha}\,b^{\lambda}_{\alpha} + a^{\lambda\mu}\,\tilde{v}_{,\mu})\,,\\ p^{3}_{I} &= +\,p^{3}_{0} - p^{\alpha}_{0}\,(b_{\alpha\beta}\,\tilde{v}^{\beta} + \tilde{v}_{,\alpha})\,.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Nach (22) und (25) ergibt sich eine Beziehung zwischen den Tensorkomponenten und den zugehörigen physikalischen Komponenten der Schnittgrößen:

$$\left.\begin{aligned}\bar{n}^{\alpha\varrho} &= \sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{\bar{a}_{\varrho\varrho}}}\;\bar{N}_{\alpha\varrho} = \sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{\varrho\varrho}}}\left[1 - \frac{1}{a_{pp}}\,(v_{p}\,{}^{0}|_{p} - b_{pp}\,v)\right]\bar{N}_{\alpha\varrho} = \sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{\varrho\varrho}}}\,f_{p}\,\bar{N}_{\alpha\varrho}\,,\\ \bar{m}^{\alpha 1} &= \sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{\bar{a}_{11}}}\;\bar{M}_{\alpha 1} = +\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{11}}}\left[1 - \frac{1}{a_{11}}\,(v_{1}\,{}^{0}|_{1} - b_{11}\,v)\right]\bar{M}_{\alpha 1} = +\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{11}}}\,f_{1}\,\bar{M}_{\alpha 1}\,,\\ \bar{m}^{\alpha 2} &= -\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{\bar{a}_{22}}}\;\bar{M}_{\alpha 2} = -\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{22}}}\left[1 - \frac{1}{a_{22}}\,(v_{2}\,{}^{0}|_{2} - b_{22}\,v)\right]M_{\alpha 2} = -\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{22}}}\,f_{2}\,M_{\alpha 2}\,.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

6. Allgemeiner Formänderungstensor. Das Quadrat des Abstands zweier benachbarter Schalenpunkte ist gegeben durch das Bogenelement und beträgt nach der Verformung

$$\bar{ds}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\Theta^\alpha\, d\Theta^\beta + (d\Theta^3)^2 . \tag{49}$$

Der ursprüngliche Abstand der beiden Punkte ist

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, d\Theta^\alpha\, d\Theta^\beta + (d\Theta^3)^2 . \tag{50}$$

Im Falle einer Verzerrung ist

$$\bar{ds}^2 - ds^2 = (\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})\, d\Theta^\alpha\, d\Theta^\beta . \tag{51}$$

Dabei ist

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \tag{52}$$

ein Maß für die Verzerrung.

Mit (12) wird dann

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - \Theta_3(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) + \frac{\Theta_3^2}{2}(\bar{b}^\mu_\alpha\, \bar{b}_{\beta\mu} - b^\mu_\alpha\, b_{\beta\mu}) , \\ \gamma_{\alpha 3} &= \gamma_{3\beta} = \gamma_{33} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

7. Allgemeines Elastizitätsgesetz. Die Schnittgrößen für den Nachbarzustand sind definiert nach (17) bzw. (23)

$$n_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \sigma_{I*}^{\alpha\varrho}\, d\Theta^3 , \qquad m_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \sigma_{I*}^{\alpha\varrho}\, \Theta_3\, d\Theta^3$$

mit

$$\sigma_{I*}^{\alpha\varrho} = (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, \tau_{I*}^{\alpha\beta}$$

und

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2\,\Theta_3 H + K\,\Theta_3^2 .$$

Solange die Untersuchung auf rein elastisches Material beschränkt bleibt, und eine Umsetzung von Formänderungsarbeit in andere Energieformen ausgeschlossen wird, existiert stets ein Potential der inneren Kräfte π_i als Funktion des Verzerrungstensors γ_{ik}.

Es gilt für elastisches Material

$$\bar{\tau}_*^{ik} = \varrho\, \frac{\partial \pi_i}{\partial \gamma_{ik}} ,$$

Das Potential π_i wird als Potenzreihe angesetzt in der Form

$$\varrho_0\, \pi_i = W + E^{ik}\gamma_{ik} + E^{iklr}\gamma_{ik}\gamma_{lr} + \cdots$$

wobei ϱ_0 die Dichte des unverformten Körpers ist.

Für $\gamma_{ik} = 0$ ist $\pi_i = 0$, also $W = 0$.

Durch Differentiation wird mit $E^{iklr} + E^{lrik} = B^{iklr}$

$$\varrho_0 \frac{\partial \pi_i}{\partial \gamma_{ik}} = \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}}\, \bar{\tau}_*^{ik} = E^{ik} + B^{iklr}\gamma_{lr} + \cdots .$$

Für $\gamma_{lr} = 0$ ist $\bar{\tau}_*^{ik} = \tau_*^{ik}$, also $E^{ik} = \tau_0^{ik}$ bei $\sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} \sim 1$.

Werden höhere Glieder der Potenzreihe vernachlässigt, so ist

$$\bar{\tau}_*^{ik} = \tau_0^{ik} + B^{iklr}\gamma_{lr} .$$

Für isotrope Körper gilt

$$B^{iklr} = G_1\left(g^{il}g^{kr} + g^{ir}g^{kl} + \frac{2\mu}{1-\mu}g^{ik}g^{lr}\right)$$

mit G als Schubmodul und μ als *Poisson*scher Zahl.

Für den Nachbarzustand gilt dann das Elastizitätsgesetz, wobei die Verformungen des Grundzustands vernachlässigt sind,

$$\tau_{I*}^{ik} = \tau_0^{ik} + B^{iklr}\tilde{\gamma}_{lr} . \tag{54}$$

werden die Spannungsgrößen τ_I^{ik} eingeführt, so gilt, wenn nur lineare Glieder der Verschiebungen berücksichtigt werden, nach (15)

$$\left.\begin{aligned} \tau_I^{11} &= \frac{\tau_0^{11}}{f_1(\bar{v})} + B^{11lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{22} &= \frac{\tau_0^{22}}{f_2(\bar{v})} + B^{22lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, \\ \tau_I^{12} &= \frac{\tau_0^{12}}{f_2(\bar{v})} + B^{12lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{21} &= \frac{\tau_0^{21}}{f_1(\bar{v})} + B^{21lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

In dieser Form ist das Elastizitätsgesetz für Stabilitätsuntersuchungen bereits geeignet, wenn auch die Bedingung der Isotropie verletzt wird[1].

Die Einführung des Elastizitätsgesetzes bedeutet eine an sich willkürliche Definition, für die nur zwei Gesichtspunkte maßgebend sind. Das Gestz soll zunächst das Verhalten der benutzten Werkstoffe möglichst gut wiedergeben und andererseits eine möglichst einfache Rechnung liefern.

Aus diesem Grunde soll der Ansatz (55) vereinfacht werden zu einem Elastizitätsgesetz, indem die Verschiebungsgrößen $f_p(\bar{v})$ gegen 1 vernachlässigt werden:

$$\left.\begin{aligned} \tau_I^{11} &= \tau_0^{11} + B^{11lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{22} &= \tau_0^{22} + B^{22er}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, \\ \tau_I^{12} &= \tau_0^{12} + B^{12lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{21} &= \frac{f_2(\bar{v})}{f_1(\bar{v})}\tau_0^{21} + B^{21lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

wobei τ_I^{21} zwangsläufig festgelegt ist durch die Momentengleichgewichtsbedingung.

Eine entsprechende Vernachlässigung in τ_I^{21} ist nicht zulässig, da die Verletzung des Momentengleichgewichts im allgemeinen eine nicht mehr widerspruchsfreie Rechnung bedeutet und auch zahlenmäßig zu einer völlig falschen Beullast führen kann.

Ebensogut hätte das Elastizitätsgesetz auch in die Form gebracht werden können

$$\left.\begin{aligned} \tau_I^{11} &= \tau_0^{11} + B^{11lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{22} &= \tau_0^{22} + B^{22lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, \\ \tau_I^{12} &= \frac{f_1(\bar{v})}{f_2(\bar{v})}\tau_0^{12} + B^{12lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{21} &= \tau_0^{21} + B^{21er}\,\bar{\gamma}_{lr}\,. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Für den Ansatz (55) liefert die Anwendung der Momentengleichgewichtsbedingung für die zugeordneten Schubspannungsgrößen einander völlig entsprechende Ausdrücke, während sich im Ansatz (56) und (57) ein Unterschied zeigt, was einen Nachteil bedeutet insofern, als er eine Abhängigkeit des Gesetzes vom Koordinatensystem ausdrückt. Damit wird die Isotropie aber nochmals verletzt. Ein weiterer Nachteil der Ansätze (56) und (57) liegt darin, daß das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht mehr erfüllt ist und daß die Anwendung des Prinzips vom stationären Wert der potentiellen Energie nicht mehr möglich ist[1]. Dies ist allerdings ein besonderer schwerwiegender Nachteil. Der Vorteil von (56) und (57) liegt andererseits in der Einfachheit, was bei der praktischen Rechnung zu beachten ist.

Aus (54), (55), (56) bzw. (54), (55), (57) läßt sich ein Elastizitätsgesetz aufbauen, in dem die Vorteile der vorher aufgestellten Ansätze ausgenutzt sind:

$$\left.\begin{aligned} \tau_I^{11} &= \tau_0^{11} + B^{11lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{22} &= \tau_0^{22} + B^{22lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, \\ \tau_I^{12} &= \frac{\tau_0^{12}}{f_2(\bar{v})} + B^{12lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,, & \tau_I^{21} &= \frac{\tau_0^{21}}{f_1(\bar{v})} + B^{12lr}\,\bar{\gamma}_{lr}\,. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Damit ist das Gesetz von der Erhaltung der Energie erfüllt, es läßt sich also das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie anwenden, andererseits sind die Ausdrücke für die Schubspannungsgrößen wieder symmetrisch.

Das Elastizitätsgesetz (58) soll den weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt werden. Mit

$$\delta^{AB} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad A = B\,, \\ \dfrac{1}{f_1(\bar{v})} & \text{für} \quad A = 2\,, \quad B = 1\,, \\ \dfrac{1}{f_2(\bar{v})} & \text{für} \quad A = 1\,, \quad B = 2 \end{cases} \tag{59}$$

[1] Vgl. *A. Pflüger*, a. a. O.

ist dann

$$\tau_I^{\alpha\beta} = \delta^{AB}\,\tau_0^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\tilde{\gamma}_{\mu\nu}\,. \tag{60}$$

Aus (17) bzw. (23) folgt mit (15)

$$n_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, f_p(\tilde{v})\, \sigma_I^{\alpha\varrho}\, d\Theta^3\,, \tag{61}$$

$$m_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, f_p(\tilde{v})\, \sigma_I^{\alpha\varrho}\, \Theta_3\, d\Theta^3\,. \tag{62}$$

Mit (60) ergibt sich

$$n_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, f_p(\tilde{v})\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, (\delta^{AB}\,\tau_0^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\tilde{\gamma}_{\mu\nu})\, d\Theta^3 \tag{63}$$

und

$$m_I^{\alpha\varrho} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, f_p(\tilde{v})\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, (\delta^{AB}\,\tau_0^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\tilde{\gamma}_{\mu\nu})\, \Theta_3\, d\Theta^3\,. \tag{64}$$

Mit

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, \tau_0^{\alpha\beta}\, d\Theta^3 = n_0^{\alpha\varrho}\,,$$

und

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, \tau_0^{\alpha\beta}\, \Theta_3\, d\Theta^3 = m_0^{\alpha\varrho} = 0$$

wird nach (26) und (27)

$$\tilde{n}^{\alpha\varrho} = (\delta^{AP} - 1)\, n_{0\bullet}^{\alpha\varrho} + f_p \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\tilde{\gamma}_{\mu\nu}\, d\Theta^3\,, \tag{65}$$

$$\tilde{m}^{\alpha\varrho} = f_p \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, (\delta_\beta^\varrho - \Theta_3\, b_\beta^\varrho)\, B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\tilde{\gamma}_{\mu\nu}\, \Theta_3\, d\Theta^3\,. \tag{66}$$

Werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$H^{\alpha\varrho\mu\nu} = \frac{1}{2}\,[(1-\mu)\,(a^{\alpha\mu}\,a^{\varrho\nu} + a^{\alpha\nu}\,a^{\varrho\mu}) + 2\,\mu\,a^{\alpha\varrho}\,a^{\mu\nu}]\,,$$

$$\begin{aligned} A^{\alpha\varrho\mu\nu} = \frac{1}{2}\,[&(1-\mu)\,(4\,b^{\alpha\mu}\,b^{\varrho\nu} + 3\,a^{\alpha\mu}\,b^{\varrho\gamma}\,b_\gamma^\nu + 3\,a^{\varrho\nu}\,b^{\alpha\gamma}\,b_\gamma^\mu + 4\,b^{\alpha\nu}\,b^{\varrho\mu} \\ &+ 3\,a^{\alpha\nu}\,b^{\varrho\gamma}\,b_\gamma^\mu + 3\,a^{\varrho\mu}\,b^{\alpha\gamma}\,b_\gamma^\nu - 2\,b_\tau^\tau\,b^{\varrho\nu}\,a^{\alpha\mu} - 2\,b_\tau^\tau\,a^{\varrho\nu}\,b^{\alpha\mu} - 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\alpha\mu}\,b^{\beta\nu} \\ &- 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\alpha\nu}\,b^{\beta\mu} - 2\,b_\tau^\tau\,a^{\alpha\nu}\,b^{\varrho\mu} - 2\,b_\tau^\tau\,a^{\varrho\mu}\,b^{\alpha\nu} - 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\alpha\nu}\,b^{\beta\mu} \\ &- 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\beta\mu}\,b^{\alpha\nu}) + 2\,\mu\,(4\,b^{\alpha\varrho}\,b^{\mu\nu} + 3\,a^{\alpha\varrho}\,b^{\mu\gamma}\,b_\gamma^\nu + 3\,a^{\mu\nu}\,b^{\alpha\gamma}\,b_\gamma^\varrho \\ &- 2\,b_\tau^\tau\,a^{\alpha\varrho}\,b^{\mu\nu} - 2\,b_\tau^\tau\,a^{\mu\nu}\,b^{\alpha\varrho} - 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\alpha\beta}\,b^{\mu\nu} - 2\,b_\beta^\varrho\,a^{\mu\nu}\,b^{\alpha\beta})] \\ &+ (b_\tau^\tau\,b_\beta^\varrho + b_1^1\,b_2^2\,\delta_\beta^\varrho - b_2^1\,b_1^2\,\delta_\beta^\varrho)\,H^{\alpha\beta\mu\nu}\,, \end{aligned}$$

$$D^{\alpha\varrho\mu\nu} = [(1-\mu)\,(a^{\alpha\mu}\,b^{\varrho\nu} + a^{\varrho\nu}\,b^{\alpha\mu} + a^{\alpha\nu}\,b^{\varrho\mu} + a^{\varrho\mu}\,b^{\alpha\nu}) + 2\,\mu\,(a^{\alpha\varrho}\,b^{\mu\nu} + a^{\mu\nu}\,b^{\alpha\varrho})] - (b_\tau^\tau\,\delta_\beta^\varrho + b_\beta^\varrho)\,H^{\alpha\beta\mu\nu}\,,$$

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\tilde{v}_\mu\,{}^{\mid}_{\nu} + \tilde{v}_\nu\,{}^{\mid}_{\mu} - 2\,b_{\mu\nu}\,\tilde{v})\,,$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = -\,(\tilde{v}^\lambda\,{}^{\mid}_{\mu}\,b_{\lambda\nu} + \tilde{v}^\lambda\,{}^{\mid}_{\nu}\,b_{\lambda\mu} - \tilde{v}\,b_\mu^\lambda\,b_{\nu\lambda} + \tilde{v}^\lambda\,b_{\lambda\mu}\,{}^{\mid}_{\nu} + \tilde{v}\,{}^{\mid}_{\mu\nu})\,,$$

$$\bar{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\bar{v}^{\gamma}\,\overset{0}{|}_{\mu}\,b_{\gamma\lambda}\,b^{\lambda}_{\nu} + \bar{v}^{\gamma}\,\overset{0}{|}_{\lambda}\,b_{\gamma\mu}\,b^{\lambda}_{\nu} - \bar{v}\,b^{\gamma}_{\mu}\,b_{\gamma\lambda}\,b^{\lambda}_{\nu} + \bar{v}^{\gamma}\,b_{\gamma\mu}\,\overset{0}{|}_{\lambda}\,b^{\lambda}_{\nu} + \bar{v}\,\overset{0}{|}_{\mu\lambda}\,b^{\lambda}_{\nu}$$
$$+ \bar{v}\,\overset{0}{|}_{\gamma\nu}\,b^{\gamma}_{\mu} - \bar{v}\,b^{\gamma}_{\nu}\,b^{\lambda}_{\gamma}\,b_{\mu\lambda} + \bar{v}^{\gamma}\,\overset{0}{|}_{\nu}\,b^{\lambda}_{\gamma}\,b_{\mu\lambda} - \bar{v}^{\lambda}\,\overset{0}{|}_{\gamma}\,b^{\gamma}_{\nu}\,b_{\mu\lambda} + \bar{v}^{\sigma}\,b_{\sigma\nu}\,\overset{0}{|}_{\gamma}\,b^{\gamma}_{\mu}$$
$$+ 2\,\bar{v}\,b_{\nu\gamma}\,b^{\lambda\gamma}\,b_{\mu\lambda})\,,$$

so folgt schließlich

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\,(\delta^{\varrho}_{\beta} - \Theta_3\,b^{\varrho}_{\beta})\,B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\bar{\gamma}_{\mu\nu}\,d\Theta^3$$
$$= \frac{E}{1-\mu^2}\left[H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{\alpha}_{\mu\nu}\cdot t + (A^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{\alpha}_{\mu\nu} + D^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu} + H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{\beta}_{\mu\nu})\,\frac{t^3}{12}\right], \tag{67}$$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\,(\delta^{\varrho}_{\beta} - \Theta_3\,b^{\varrho}_{\beta})\,B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\bar{\gamma}_{\mu\nu}\,\Theta_3\,d\Theta^3 = \frac{E}{1-\mu^2}\,(D^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{\alpha}_{\mu\nu} + H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu})\,\frac{t^3}{12}\,. \tag{68}$$

8. Vereinfachtes Elastizitätsgesetz. Im Interesse eines konsequenten Aufbaues der allgemeinen Theorie wird eine grundlegende Vereinfachung im Elastizitätsgesetz eingeführt, und zwar werden in den Schnittkräften alle Größen vernachlässigt, die proportional zur Biegesteifigkeit sind, während in den Momenten nur die jeweils höchsten Ableitungen der w-Verschiebung beibehalten werden. Diese Vernachlässigungen werden durchgeführt in Anlehnung an die üblichen Vernachlässigungen in der von *Zerna* aufgestellten Schalenstatik[1].

Durch die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte, die in Hinblick auf eine praktische Brauchbarkeit notwendig ist, werden von vornherein Glieder einer bestimmten Größenordnung unterdrückt. Die in dem Elastizitätsgesetz genannten Glieder entsprechen aber dieser Größenordnung. Es liegt daher nahe, auch diese Glieder zu vernachlässigen. Damit wird aus (67) und (68)

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\,(\delta^{\varrho}_{\beta} - b^{\varrho}_{\beta}\,\Theta_3)\,B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\bar{\gamma}_{\mu\nu}\,d\Theta^3 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{2}\,H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,(\bar{v}_{\mu}\,\overset{0}{|}_{\nu} + \bar{v}_{\nu}\,\overset{0}{|}_{\mu} - 2\,b_{\mu\nu}\,\bar{v})\,t\right],$$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\,(\delta^{\varrho}_{\beta} - b^{\varrho}_{\beta}\,\Theta_3)\,B^{\alpha\beta\mu\nu}\,\ddot{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}\,\Theta_3\,d\Theta^3 = -\frac{E}{1-\mu^2}\,H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{v}_{,\mu\nu}\,\frac{t^3}{12}\,.$$

Damit ergibt sich folgendes Elastizitätsgesetz:

$$\bar{n}^{\alpha\varrho} = f_p\,(\delta^{AP} - 1)\,n^{\alpha\varrho}_{0} - f_p\,\frac{E\,t}{1-\mu^2}\,H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{\alpha}_{\mu\nu}\,, \tag{69}$$

$$\widetilde{m}^{\alpha\varrho} = -f_p\,\frac{E\,t^3}{12\,(-\mu^2)}\,H^{\alpha\varrho\mu\nu}\,\bar{v}_{1\,\mu\nu}\,. \tag{70}$$

Dabei ist allerdings das Momentengleichgewicht um die Schalennormale nicht mehr exakt erfüllt. Die Abweichung ist aber von einer Größenordnung, die den vernachlässigten Gliedern im Elastizitätsgesetz entspricht. Damit kann die Abweichung in der Momentengleichgewichtsbedingung ebenfalls vernachlässigt werden.

Für das Beispiel einer auf Torsion beanspruchten Zylinderschale wurde dies vereinfachte Elastizitätsgesetz benutzt und es zeigte sich, daß das Gesetz dort zu einem brauchbaren Ergebnis führt. Ob die Vereinfachung im Elastizitätsgesetz allgemeingültig ist, bedarf allerdings noch einer weiteren Untersuchung.

9. Anwendung der Energiemethode. Mittels der Energiemethode werden die Gleichungen der Gleichgewichtsmethode kontrolliert und gleichzeitig wird ein Variationsproblem gewonnen, das den Ausgangspunkt für ein wichtiges Näherungsverfahren bildet. Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist

$$\bar{A}^{*}_{i} = -\int\int\int \bar{\tau}^{ik}_{*}\,\bar{\gamma}_{ik}\,\sqrt{g}\;d\Theta^1\,d\Theta^2\,d\Theta^3 = -\int\int\int \frac{\bar{\tau}^{ik}_{*}\,\bar{\gamma}_{ik}}{\varrho}\,\varrho\,\sqrt{g}\;d\Theta^1\,d\Theta^2\,d\Theta^3\,. \tag{71}$$

Mit

$$\bar{\pi}^{*}_{i} = \frac{\bar{\tau}^{ik}_{*}\,\bar{\gamma}_{ik}}{\varrho}$$

[1] Vgl. *W. Zerna*, Ing.-Arch. **17** (1949) S. 149.

wird dann

$$\tilde{A}_i^* = -\iiint \tilde{\pi}_i^* \varrho \sqrt{\overline{g}}\, d\Theta^1\, d\Theta^2\, d\Theta^3 . \tag{72}$$

Die Größe $\tilde{\pi}_i^*$ wird als vollständiges Differential der Funktion π_i vorausgesetzt; π_i soll nur abhängen vom Verzerrungszustand, vom Maßtensor des verformten Schalenraumes, sowie von Größen, die die physikalischen Eigenschaften der Schale charakterisieren, im Wesentlichen also $\pi_i = \pi_i(\gamma_{ik})$. Es ist

$$\tilde{\pi}_i^* = \tilde{\pi}_i = \frac{\partial \pi_i}{\partial \gamma_{ik}} \tilde{\gamma}_{ik} .$$

Diese Bedingung stellt die Definition eines „elastischen Körpers" dar; π_i ist das elastische Potential bezogen auf die Volumeneinheit, $\tilde{\pi}_i$ ist die erste Variation des elastischen Potentials.

Unter dieser Bedingung ist

$$\tilde{A}_i^* = \tilde{A}_i = -\tilde{\Pi}_i = -\iiint \tilde{\pi}_i \varrho \sqrt{\overline{g}}\, d\Theta^1\, d\Theta^2\, d\Theta^3 = -\tilde{\iiint} \pi_i \varrho \sqrt{\overline{g}}\, d\Theta^1\, d\Theta^2\, d\Theta^3 \tag{73}$$

mit Π_i als elastischem Potential der gesamten Schale.

Mit $\varrho_0 \sqrt{g} = \varrho \sqrt{\overline{g}}$ (Satz von der Erhaltung der Masse) wird

$$\Pi_i = \iiint \pi_i \varrho_0 \sqrt{g}\, d\Theta^1\, d\Theta^2\, d\Theta^3 . \tag{74}$$

Ein Potenzreihenansatz für π_i liefert

$$\varrho_0 \pi_i = \frac{1}{2} \tau_0^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \bar{\tau}_*^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\alpha} + \cdots .$$

Für den Nachbarzustand gilt entsprechend

$$\varrho \pi_{Ii} = \frac{1}{2} \tau_0^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \tau_I^{\alpha\beta} f_p(\tilde{v}) \tilde{\gamma}_{\beta\alpha} + \cdots ,$$

und durch Einführung von (60) ergibt sich

$$\varrho_0 \pi_{Ii} = \frac{1}{2} (1 + f_B \cdot \delta^{AB}) \tau_0^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} B^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} . \tag{76}$$

Mit

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \tau_0^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = n_0^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^0 , \tag{77}$$

wobei $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^0$ den Verzerrungstensor der Mittelfläche darstellt, folgt für das elastische Potential bezogen auf die Flächeneinheit

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \varrho_0 \pi_{Ii} \sqrt{g}\, d\Theta^3 = \frac{\sqrt{a}}{2} (1 + f_B\, \delta^{AB}) \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^0 n_0^{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{a}}{2} \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, B^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\mu\nu}\, d\Theta^3 . \tag{78}$$

Das Potential der inneren Kräfte ist nach (74)

$$\Pi_{Ii} = \frac{1}{2} \int\int \left[(1 + f_B\, \delta^{AB}) \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}^0 n_0^{\alpha\beta} + \int_{-t/2}^{+t/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, B^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\mu\nu}\, d\Theta^3 \right] \sqrt{a}\, d\Theta^1\, d\Theta^2 . \tag{79}$$

Die praktische Berechnung von Π_{Ii} wird noch erheblich vereinfacht, da die exakte Berücksichtigung der Verformung des Grundzustands fortfällt, und infolgedessen Verformungsgrößen in jedem Fall nur noch bis auf quadratische Glieder berechnet zu werden brauchen.

Mit den Abkürzungen

$$H^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \Big[\big((1-\mu) (a^{\alpha\mu} a^{\beta\nu} + a^{\alpha\nu} a^{\beta\mu}) + 2\mu\, a^{\alpha\beta} a^{\mu\nu} \big) ,$$

$$F^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \big((1-\mu) (3\, a^{\alpha\mu} b^{\beta\gamma} b_\gamma^\nu + 3\, a^{\beta\nu} b^{\alpha\gamma} b_\gamma^\mu + 4\, b^{\alpha\mu} b^{\beta\nu} + 3\, a^{\alpha\nu} b^{\beta\gamma} b_\beta^\mu$$

$$+ 3\, a^{\beta\mu} b^{\alpha\gamma} b_\gamma^\nu + 4\, b^{\alpha\nu} b^{\beta\mu}) + 2\mu\, (3\, a^{\alpha\beta} b^{\mu\gamma} b_\gamma^\nu + 3\, a^{\mu\nu} b^{\alpha\gamma} b_\gamma^\beta + 4\, b^{\alpha\beta} b^{\mu\nu}) \Big] ,$$

$$G_{\alpha\beta\mu\nu} = (1-\mu) (a^{\alpha\mu} b^{\beta\nu} + a^{\beta\nu} b^{\alpha\mu} + a^{\alpha\nu} b^{\beta\mu} + a^{\beta\mu} b^{\alpha\nu}) + 2\mu\, (a^{\alpha\beta} b^{\mu\nu} + a^{\mu\nu} b^{\alpha\beta}) ,$$

$$\tilde{\xi}_{\alpha\beta\mu\nu} = \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \tilde{\alpha}_{\mu\nu} ,$$

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta\mu\nu} = \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \tilde{\omega}_{\mu\nu} + \tilde{\alpha}_{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - 2H \cdot \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \cdot \tilde{\alpha}_{\mu\nu} ,$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta\mu\nu} = \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \tilde{\beta}_{\mu\nu} + \tilde{\alpha}_{\mu\nu} \tilde{\beta}_{\alpha\beta} + \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \tilde{\omega}_{\mu} - 2H \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \tilde{\omega}_{\mu\nu} - 2H \tilde{\alpha}_{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\alpha\beta} + K \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} \tilde{\alpha}_{\mu\nu} ,$$

geht das elastische Potential über in

$$\Pi_{Ii} = \frac{1}{2}\int\int\left\{n_0^{\alpha\beta}\,\bar{\gamma}^0_{\alpha\beta}\,(1+f_B\,\delta^{AB}) + \frac{E}{1-\mu^2}\left[\bar{\xi}_{\alpha\beta\mu\nu}\,H^{\alpha\beta\mu\nu}\,t + (\bar{\xi}_{\alpha\beta\mu\nu}\,F^{\alpha\beta\mu\nu} + \bar{\eta}_{\alpha\beta\mu\nu}\,G^{\alpha\beta\mu\nu} + \bar{\varphi}_{\alpha\beta\mu\nu}\,H^{\alpha\beta\mu\nu})\,\frac{t^3}{12}\right]\right\} d\Theta^1\,d\Theta^2\,. \tag{80}$$

Damit ist das Potential der inneren Kräfte π_{Ii} bestimmt, und π_{Ii} enthält den Anteil, den die bei der Verformung neu auftretenden Schnittgrößen leisten, sowie den Beitrag der Größen $n_0^{\alpha\beta}$ des Grundzustands.

Wird mit mit $\bar{a}_a^*$ die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte pro Einheit der Mittelfläche bezeichnet, so gilt bei einer Variation des Nachbarzustands

$$\bar{a}^*_{Ia} = p_I^1\,\delta\bar{v}_1 + p_I^2\,\delta\bar{v}_2 + p_I^3\,\delta\bar{v}_3\,. \tag{81}$$

Insgesamt wird die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

$$\bar{A}^*_{Ia} = \int\int \bar{a}^*_{Ia}\,\sqrt{a}\,d\Theta^1\,d\Theta^2\,, \tag{82}$$

wobei p_I^a und p_I^3 die Tensorkomponenten der äußeren Belastung am verformten System sind und zwar bezogen auf die unverformten Koordinaten.

Unter der Voraussetzung, daß es eine Funktion gibt mit

$$d\,\pi_{Ia} = -\,\bar{a}^*_{Ia}\,,$$

existiert für die äußeren Kräfte ein Potential mit

$$\Pi_{Ia} = \int\int \pi_{Ia}\,\sqrt{a}\,d\Theta^1\,d\Theta^2\,. \tag{83}$$

Damit läßt sich das Gesamtpotential aufstellen:

$$\Pi_I = \Pi_{Ii} + \Pi_{Ia} = \Pi_0 + \bar{\delta}\Pi_0 + \frac{1}{2}\bar{\delta}^2\Pi_0 + \cdots\,, \tag{84}$$

wobei der eine Querstrich über dem Variationszeichen andeutet, daß es sich um eine spezielle Variation handelt.

Die erste Variation der potentiellen Energie des Grundzustands muß für jeden Gleichgewichtszustand verschwinden.

Für den Fall des indifferenten Gleichgewichts ist somit

$$\delta\,\Pi_i = \frac{1}{2}\,\delta(\bar{\delta}^2\Pi_0) = 0\,. \tag{85}$$

Es muß demnach die erste Variation von mindestens einer speziellen zweiten Variation des Gesamtpotentials bei ungeänderter Beslastung verschwinden.

Die *Euler*schen Gleichungen dieses Variationsproblems liefern dann drei Differentialgleichungen für die Verschiebungsgrößen $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$. Andererseits bildet (85) den Ausgangspunkt für das *Ritz*sche Verfahren zur Lösung eines speziellen Stabilitätsproblems.

Es wurden nach der oben entwickelten Theorie verschiedene Probleme durchgerechnet, wie Zylinderschale unter konstantem Druck sowie unter Torsionsbeanspruchung, ferner Kegel-, Kugel- und Rotationsparaboloidschale unter Eigengewicht. Es zeigte sich dabei an allen Fällen völlige Übereinstimmung mit den nach bisher üblichen Methoden abgeleiteten Gleichungen. Das Beispiel eines hyperbolichen Paraboloids zeigte darüber hinaus, daß obiges Verfahren prinzipiell auch auf Probleme mit schiefwinkligen Koordinaten anwendbar ist.

(Eingegangen am 31. Oktober 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *G. Schwarze*, Oberhausen-Sterkrade, Kirchhellener Str. 8 A.

Nichtlineare Schwingungen bei zwei Freiheitsgraden

I. Mitteilung

Von **C. Schmieden**

1. Einleitung. In zwei Noten im Ingenieur-Archiv hat *Th. Pöschl* versucht, im Falle eines Doppelpendels mit endlichen Ausschlägen für die periodischen Lösungen — von ihm Hauptschwingungen genannt — die Beziehung zwischen Frequenz und maximaler Amplitude zu bestimmen [1]. Leider enthielt sein Ansatz einen prinzipiellen Fehler, wodurch seine Ergebnisse hinfällig wurden [2]. Das Problem blieb also offen; denn auch die Ergebnisse, die *G. Bradastilow*[3] in seiner Dissertation erzielte, zeigten nur, daß die periodischen Lösungen der linearisierten Differentialgleichungen — die Normalschwingungen der Theorie der kleinen Schwingungen — für hinreichend kleine Amplituden auch für das nichtlinearisierte System existieren. Zudem wurde dabei der eigentlich interessante Fall ausgeschlossen, daß die Frequenzen von Grund- und Ober-Schwingung in ganzzahligem Verhältnis stehen.

Da das System der Bewegungsgleichungen des Doppelpendels bei endlichen Ausschlägen außerordentlich kompliziert ist, soll hier ein anderes, mathematisch einfacher zu diskutierendes System untersucht werden; es ist so aufgebaut, daß es für kleine Ausschläge in das System des Doppelpendels gleicher Fadenlängen, aber beliebigen Massenverhältnisses übergeht, außerdem aber auch die Verallgemeinerung der bekannten Differentialgleichung von *Duffing* auf zwei Freiheitsgrade darstellt. Für dies System werden wir die periodischen Lösungen für endliche Ausschläge aufstellen, und zwar auch in den Fällen, wo die Frequenzen für Grund- und Oberschwingung in ganzzahligem Verhältnis stehen.

2. Die periodischen Lösungen im allgemeinen Fall. Wir legen das folgende System von Differentialgleichungen unseren Untersuchungen zugrunde:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + \alpha^2 \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \vartheta + \beta \omega_0^2 \vartheta^3 = 0 \,, \\ \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \beta \omega_0^2 \vartheta^3 = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Setzt man hier $\beta = 0$ und gleichzeitig $\omega_0^2 = g/l$, so erhält man die Gleichungen für die kleinen Schwingungen des mathematischen Doppelpendels gleicher Fadenlängen l, mit der oberen Masse m_1 (Ausschlag ϑ) und der unteren Masse m_2 (Ausschlag φ), wobei

$$\alpha^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (0 < \alpha^2 < 1) \,. \tag{2}$$

Für die Grundschwingung erhält man in diesem Fall

$$\omega_{10}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \alpha} \,, \qquad \varphi = A \sin \omega_{10} t \,, \qquad \vartheta = \alpha A \sin \omega_{10} t \,, \tag{3a}$$

ebenso für die Oberschwingung

$$\omega_{20}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha} \,, \qquad \varphi = A \sin \omega_{20} t \,, \qquad \vartheta = -\alpha A \sin \omega_{20} t \,. \tag{3b}$$

Wir wollen nun die periodischen Lösungen des Systems (1) durch Potenzreihen nach dem als klein vorausgesetzten Parameter β darstellen. Dazu bringen wir das System (1) zunächst in eine andere, einfachere Form, indem wir setzen

$$\tau = \omega_0 \sqrt{1 + \varkappa}\, t \,, \qquad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \vartheta' \,, \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \varphi' \,. \tag{4}$$

Damit geht (1) über in

$$\left.\begin{aligned} (1 + \varkappa)(\vartheta'' + \alpha^2 \varphi'') + \vartheta + \beta \vartheta^3 = 0 \,, \\ (1 + \varkappa)(\vartheta'' + \varphi'') + \varphi + \beta \varphi^3 = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] *Th. Pöschl*, Ing.-Arch. **20** (1952) S. 189 und **21** (1953), S. 396.
[2] *Th. Pöschl*, Berichtigung. Ing.-Arch. **22** (1954), S. 294.
[3] *G. Bradastilow*, Math. Ann. 116 (1939) S. 181.

Da für kleine Schwingungen Grund- und Oberschwingung durch Vertauschung von α mit $-\alpha$ ineinander übergehen und der Parameter α nur quadratisch in (5) eingeht, genügt es, die Grundschwingung weiter zu verfolgen; die Oberschwingung erhält man durch Vertauschung von α mit $-\alpha$. Wir machen nun für ϑ, φ und $\varkappa$ die folgenden Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} 1+\varkappa &= \frac{1}{1+\alpha} + \varkappa_1\beta + \varkappa_2\beta^2 + \cdots, \\ \varphi &= A\sin\tau + \Phi_3\sin 3\tau + \cdots, \\ \vartheta &= \Theta_1\sin\tau + \Theta_3\sin 3\tau + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei wir die Φ_ν und Θ_ν in Form von Potenzreihen nach β ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \alpha A + \beta\vartheta_{11} + \beta^2\vartheta_{12} + \cdots, \\ \Theta_\nu &= \vartheta_{\nu 0} + \beta\vartheta_{\nu 1} + \beta^2\vartheta_{\nu 1} + \cdots; \quad \Phi_\nu = \varphi_{\nu 0} + \beta\varphi_{\nu 1} + \beta^2\varphi_{\nu 2} + \cdots \quad (\nu \geqq 3). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ist das Verhältnis von ω_{10} zu ω_{20} nicht ganzzahlig, so beginnen die Entwicklungen von Φ_{2n+1} und Θ_{2n+1} mit β^n (s. u.).

Wir berechnen jetzt zunächst ϑ^3 und φ^3 soweit, wie wir es auch für die Ausnahmefälle gebrauchen werden, und erhalten

$$4\vartheta^3 = Q_1\sin\tau + Q_3\sin 3\tau + Q_5\sin 5\tau + Q_7\sin 7\tau + Q_9\sin 9\tau \tag{8}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 3(\Theta_1^3 - \Theta_1^2\Theta_3 + 2\Theta_1\Theta_3^2 - 2\Theta_1\Theta_3\Theta_5 + \Theta_3^2\Theta_5 - \Theta_3^2\Theta_7), \\ Q_3 &= -\Theta_1^3 + 3(2\Theta_1^2\Theta_3 + \Theta_3^3 - \Theta_1^2\Theta_5 + 2\Theta_1\Theta_3\Theta_5 - 2\Theta_1,\Theta_3\Theta_7 - \Theta_3^2\Theta_9), \\ Q_5 &= 3(-\Theta_1^2\Theta_3 + \Theta_1\Theta_3^2 + 2\Theta_1^2\Theta_5 - \Theta_1^2\Theta_7 + 2\Theta_1\Theta_3\Theta_7 - 2\Theta_1\Theta_3\Theta_9 + 2\Theta_3^2\Theta_5), \\ Q_7 &= 3(-\Theta_1\Theta_3^2 - \Theta_1^2\Theta_5 + 2\Theta_1^2\Theta_7 - \Theta_1^2\Theta_9 + 2\Theta_1\Theta_3\Theta_5 + 2\Theta_1\Theta_3\Theta_9 + 2\Theta_3^2\Theta_7), \\ Q_9 &= -\Theta_3^3 + 3(-\Theta_1^2\Theta_7 + 2\Theta_1^2\Theta_9 - 2\Theta_1\Theta_3\Theta_5 + 2\Theta_1\Theta_3\Theta_7 + 2\Theta_3^2\Theta_9). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die entsprechenden Formeln für φ^3 erhält man, wenn man in (9) Θ_1 durch A und die übrigen Θ_ν durch Φ_ν ersetzt.

Setzen wir nun zunächst voraus, daß Θ_3 und Φ_3 von der Ordnung β ausfallen, so erkennt man aus (9) sofort, daß dann die Φ_{2n+1} und Θ_{2n+1} von der Ordnung β^n ausfallen. Setzen wir demgemäß

$$\Theta_{2n+1} = \beta^n\vartheta_{2n+1}, \qquad \Phi_{2n+1} = \beta^n\varphi_{2n+1}, \tag{10}$$

so reduzieren sich die Q_ν, wenn man Terme von der Ordnung β^3 vernachlässigt, erheblich, und man erhält durch Koeffizientenvergleich in bezug auf die $\sin\tau$, $\sin 3\tau$ usw. die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &-(1+\varkappa)[\Theta_1 + \alpha^2 A] + \Theta_1 + \frac{3}{4}\beta[\Theta_1^3 - \beta\Theta_1^2\vartheta_3 + 2\beta^2\Theta_1\vartheta_3^2] = 0, \\ &-(1+\varkappa)[\Theta_1 + A] + A + \frac{3}{4}\beta[A^3 - \beta A^2\varphi_3 + 2\beta^2 A\varphi_3^2] = 0; \\ &-9(1+\varkappa)[\vartheta_3 + \alpha^2\varphi_3] + \vartheta_3 + \frac{1}{4}[-\Theta_1^3 + 6\beta\Theta_1^2\vartheta_3 - 3\beta^2\Theta_1^2\vartheta_5] = 0, \\ &-9(1+\varkappa)[\vartheta_3 + \varphi_3] + \varphi_3 + \frac{1}{4}[-A^3 + 6\beta A^2\varphi_3 - 3\beta^2 A^2\varphi_5] = 0; \\ &-25(1+\varkappa)[\vartheta_5 + \alpha^2\varphi_5] + \vartheta_5 + \frac{3}{4}[-\Theta_1^2\vartheta_3 + \beta\Theta_1\vartheta_3^2 + 2\beta\Theta_1^2\vartheta_5] = 0, \\ &-25(1+\varkappa)[\vartheta_5 + \varphi_5] + \varphi_5 + \frac{3}{4}[-A^2\varphi_3 + \beta A\varphi_3^2 + 2\beta A^2\varphi_5] = 0; \\ &-49(1+\varkappa)[\vartheta_7 + \alpha^2\varphi_7] + \vartheta_7 + \frac{3}{4}[-\Theta_1\vartheta_3^2 - \Theta_1^2\vartheta_5] = 0, \\ &-49(1+\varkappa)[\vartheta_7 + \varphi_7] + \varphi_7 + \frac{3}{4}[-A\varphi_3^2 - A^2\varphi_5] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Durch Koeffizientenvergleich der niedrigsten Potenzen in β folgen daraus zunächst die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (8-\alpha)\,\vartheta_{31} + 9\,\alpha^2 \varphi_{31} + \frac{1}{4}\,\alpha^3 (1+\alpha)\,A^3 = 0\,, \\ 9\,\vartheta_{31} + (8-\alpha)\,\varphi_{31} + \frac{1}{4}\,(1+\alpha)\,A^3 = 0\,; \\ \vartheta_{11} - A\,(1+\alpha)^2 \varkappa_1 + \frac{3}{4}\,\alpha^2 (1+\alpha)\,A^3 = 0\,, \\ \vartheta_{11} + A\,(1+\alpha)^2 \varkappa_1 - \frac{3}{4}\,(1+\alpha)\,A^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{31} = \frac{\alpha^2 A^3}{64\,(4-5\,\alpha)}\,(9 - 8\,\alpha + \alpha^2)\,, \qquad \varphi_{31} = -\frac{A^3}{64\,(4-5\,\alpha)}\,(8 - \alpha - 9\,\alpha^3)\,, \\ \varkappa_1 = \frac{3}{8}\,A^2\,\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha}\,, \qquad \vartheta_{11} = \frac{3}{8}\,A^3\,(1+\alpha)\,(1-\alpha^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In der nächsten Ordnung entstehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,\vartheta_{12} - A\,\alpha\,(1+\alpha)^2 \varkappa_2 - (1+\alpha)\,\varkappa_1\,\vartheta_{11} + \frac{3}{4}\,A^2\,\alpha^2\,(1+\alpha)\,[3\,\vartheta_{11} - \vartheta_{31}] = 0\,, \\ \vartheta_{12} + A\,(1+\alpha)^2 \varkappa_2 + (1+\alpha)\,\varkappa_1\,\vartheta_{11} + \frac{3}{4}\,A^2\,(1+\alpha)\,\varphi_{31} = 0\,; \\ (8-\alpha)\,\vartheta_{32} + 9\alpha^2 \varphi_{32} + \frac{3}{4}\,A^2\,\alpha^2\,(1+\alpha)\,\vartheta_{11} - \frac{3}{2}\,A^2 \alpha^2 (1+\alpha)\,\vartheta_{31} + 9\,(1+\alpha)\,\varkappa_1 (\vartheta_{31} + \alpha^2 \varphi_{31}) = 0\,, \\ 9\,\vartheta_{32} + (8-\alpha)\,\varphi_{32} - \frac{3}{2}\,A^2\,(1+\alpha)\,\varphi_{31} + 9\,(1+\alpha)\,\varkappa_1\,(\vartheta_{31} + \varphi_{31}) = 0\,; \\ (24-\alpha)\,\vartheta_{52} + 25\,\alpha^2 \varphi_{52} + \frac{3}{4}\,A^2\,\alpha^2\,(1+\alpha)\,\vartheta_{31} = 0\,, \\ 25\,\vartheta_{52} + (24-\alpha)\,\varphi_{52} + \frac{3}{4}\,A^2\,(1+\alpha)\,\varphi_{31} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Um unnötige Formelschreiberei zu vermeiden, geben wir hier nur die Werte von ϑ_{12} und $\varkappa_2$ explizit an:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{12} = \frac{9}{128}\,A^5\,\frac{(1-\alpha^4)\,(1-\alpha^2)}{\alpha} + \frac{3}{8}\,A^5\,(1+\alpha)\left[\frac{(1-\alpha^4)\,(8-\alpha)}{64\,(4-5\,\alpha)} - \frac{9}{8}\,\alpha\,(1+\alpha)\,(1-\alpha^2)\right], \\ \varkappa_2 = -\frac{9}{128}\,A^4\cdot\frac{1-\alpha^4}{\alpha} + \frac{3}{8}\,A^4\left[\frac{(1+\alpha^2)^2\,(8-\alpha)}{64\,(1+\alpha)\,(4-5\,\alpha)} - \frac{1}{4}\,\frac{\alpha^2}{4-5\,\alpha} + \frac{9}{8}\,\alpha\,(1-\alpha^3)\right], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

während wir für die übrigen vier Größen nur bemerken wollen, daß bei φ_{32} und ϑ_{32} jeweils ein Term auftritt, der dem Faktor $(4 - 5\alpha)$ bereits quadratisch im Nenner enthält, wogegen bei φ_{52} und ϑ_{52} die Faktoren $(4 - 5\,\alpha)$ und $(12 - 13\,\alpha)$ jeweils im Nenner auftreten. Schreibt man die Gleichungen für $\varkappa_3$ und ϑ_{13} an, so sieht man, daß in ihnen bereits ϑ_{32} und φ_{32} auftreten, also $\varkappa_3$ den Faktor $(4 - 5\,\alpha)$ ebenfalls quadratisch im Nenner enthält. Bei $\varkappa_4$, in dessen Bestimmungsgleichung auch φ_{52} und ϑ_{52} eingehen, tritt erstmalig der Faktor $(12 - 13\,\alpha)$ im Nenner auf, und so geht es fort. Dies Verhalten zeigt jedenfalls, daß für ein α in der Nähe dieser kritischen Werte die Konvergenz unserer Entwicklung sowohl für die Amplituden wie für die Frequenz aufhören muß. Dies gilt allerdings nur für die Grundschwingung, da ja für die Oberschwingung α durch $-\alpha$ zu ersetzen ist und damit an den kritischen Stellen keine Singularitäten auftreten. Für hinreichend kleine β ist also für die Oberschwingung die Konvergenz unserer Entwicklungen gesichert, es sei denn, α sei sehr klein.

Denn beide Entwicklungen versagen außerdem noch für sehr kleine Werte von α, da bereits in $\varkappa_2$ und ϑ_{12} Terme mit α^{-1} auftreten und, wie man leicht sieht, daraus in den Termen höherer Ordnung Glieder mit höheren Potenzen von α^{-1} resultieren. Wir haben also zunächst folgendes Ergebnis:

Nur im Bereich $\beta \ll \alpha \ll 4/5 - \beta$ ist die Entwicklung für die Grundschwingung für hinreichend kleine β sicher konvergent. Die Ungleichung für α ist dabei als Ungleichung hinsichtlich der Größenordnung in β zu verstehen. Bei der Oberschwingung gilt nur die untere Schranke.

Wir wollen jetzt die physikalischen Ursachen für das Aufhören der Konvergenz der Entwicklungen aufzeigen und untersuchen zu dem Zweck zunächst die Singularität für $\alpha = 4/5$ näher.

3. Der Fall $\alpha = 4/5$. Setzt man den Wert $a = 4/5$ in die Frequenzgleichungen der kleinen Schwingungen (3) ein, so sieht man sofort, daß sich diese Frequenzen jetzt wie 1:3 verhalten, also das zu $\sin 3\tau$ proportionale Glied der Grundschwingung in Resonanz zu dem Anfangsgliede der Oberschwingung steht. Bei den kleinen Schwingungen kann man also Grund -und Oberschwingung mit beliebigen Amplituden addieren und erhält wieder eine Normalschwingung. Für das nicht-lineare System entfällt natürlich diese beliebige Überlagerung; aber dafür treten, wie wir zeigen wollen, anstelle der einen periodischen Lösung, die für $\alpha < 4/5$ die Fortsetzung der Grundschwingung bei $\beta = 0$ darstellt, in der Umgebung des kritischen Wertes von α drei verschiedene periodische Lösungen auf, bei denen die Amplitude des zu $\sin 3\tau$ gehörigen Termes von der gleichen Größenordnung wird wie die Amplitude des Grundtermes. Es liegt aber keine Verzweigung der Lösung vor! Um die periodischen Lösungen nahe bei $\alpha = 4/5$ zu untersuchen, setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{16}{25} + \beta\,\xi\,, \quad 1 + \varkappa = \frac{5}{9} + \varkappa_1\,\beta + \dots . \\ \Theta_1 &= \frac{4}{5}\,A + \beta\,\vartheta_{11} + \dots , \qquad \Theta_3 = \vartheta_{30} + \beta\,\vartheta_{31} \dots , \qquad \Phi_3 = \varphi_{30} + \beta\,\varphi_{31} \dots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Da jetzt Φ_3 und Θ_3 Terme endlicher Ordnung enthalten, werden daraufhin Φ_5 bis Θ_9 von der Ordnung β, so daß nunmehr in den Q_ν der Gleichungen (9) alle hingeschriebenen Ausdrücke berücksichtigt werden müssen, wenn man die Lösung bis auf Glieder in β^2 einschl. erhalten will. Um aber das charakteristische Verhalten der Lösungen zu erkennen, genügt bereits die Kenntnis aller zu β protionalen Glieder, so daß wir uns auf diese Näherung beschränken können. Aus (11) erhalten wir jetzt als Gleichungen nullter Ordnung in β die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{5}{9}\left(\frac{4}{5} + \frac{16}{25}\right)A + \frac{4}{5}\,A = 0\,, \quad -\frac{5}{9}\left(\frac{4}{5} + 1\right)A + A = 0\,, \\ -5\left(\vartheta_{30} + \frac{16}{25}\,\varphi_{30}\right) + \vartheta_{30} = 0\,, \quad -5\,(\vartheta_{30} + \varphi_{30}) + \varphi_{30} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die beiden ersten sind natürlich, wie es sein muß, identisch erfüllt, während die beiden letzten übereinstimmen, und liefern

$$5\,\vartheta_{30} + 4\,\varphi_{30} = 0\,, \qquad \vartheta_{30} = -\frac{4}{5}\,\varphi_{30}\,. \tag{18}$$

Würde man jetzt $A = 0$ setzen, so erhielte man bei willkürlichen φ_{30} natürlich gerade die Oberschwingung. Es muß also $A \neq 0$ beibehalten werden.

In der nächsten Ordnung erhält man für $\varkappa_1, \vartheta_{11}, \vartheta_{31}, \varphi_{31}$ die folgenden Gleichungen, wobei bereits ϑ_{30} durch φ_{30} ausgedrückt ist:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{4}{9}\,\vartheta_{11} - \frac{36}{25}\,\varkappa_1\,A - \frac{5}{9}\,\xi\,A + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^3 (A^3 + A^2\varphi_{30} + 2\,A\,\varphi_{30}^2) = 0\,, \\ &\frac{5}{9}\,\vartheta_{11} + \frac{9}{5}\,\varkappa_1\,A + \frac{3}{4}\,(-A^3 + A^2\varphi_{30} - 2\,A\,\varphi_{30}^2) = 0\,; \\ &5\,\vartheta_{31} + 4\,\varphi_{31} = \frac{9}{5}\,\varkappa_1\varphi_{30} - \frac{25}{4}\,\xi\,\varphi_{30} - \frac{4}{25}\,(A^3 + 6\,A^2\varphi_{30} + 3\,\varphi_{30}^3)\,, \\ &5\,\vartheta_{31} + 4\,\varphi_{31} = -\frac{9}{5}\,\varkappa_1\varphi_{30} - \frac{1}{4}\,(A^3 - 6\,A^2\varphi_{30} - 3\,\varphi_{30}^3)\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Sollen die beiden letzten Gleichungen keinen Widerspruch enthalten, so müssen ihre rechten Seiten übereinstimmen. Das liefert aber eine Gleichung für das noch unbekannte φ_{30} und $\varkappa_1$ mit ξ als Parameter. Wir haben also jetzt drei Gleichungen für die drei unbekannten α_1, ϑ_{11} und φ_{30}. Eliminiert man aus ihnen ϑ_{11} und $\varkappa_1$, so erhält man für φ_{30} als Funktion von ξ mit $\varphi_{30} = A\,x$

$$41\,x^3 - 9\,x^2 - 41\,x - \frac{2\cdot 5^5}{27}\cdot\frac{\xi}{A^2}\,x + 3 = 0\,. \tag{20}$$

Diese Gleichung hat für positive ξ drei reelle Wurzeln, eine negative und zwei positive. Für negative ξ wandern die beiden positiven Wurzeln wegen des für Amplituden der Größenordnung Eins sehr großen Zahlenfaktors von ξ in dieser Gleichung rasch ins Komplexe ab, während für große Beträge von ξ die negative Wurzel in erster Näherung gegeben ist durch

$$x = -\frac{3^4}{2\cdot 5^5}\,\frac{A^2}{|\xi|} + \left[\frac{1}{\xi^2}\right].$$

Es gilt also hier

$$\varphi_{30} = -\frac{3^4}{2\cdot 5^5}\frac{A^3}{|\xi|} + \left[\frac{1}{\xi^2}\right]. \qquad (21)$$

Andererseits liefert unsere Grundlösung nach (13), die ja für große Werte von $|\xi|$ noch brauchbar ist, wenn man in sie

$$\alpha^2 = \frac{16}{25} + \beta\,\xi\,, \quad \alpha = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{25}{32}\beta\,\xi + \cdots\right)$$

einträgt, also setzt

$$4 - 5\,\alpha = -\frac{25}{8}\beta\,\xi + \cdots, \qquad 8 - \alpha - 9\,\alpha^3 = \frac{4\cdot 3^4}{5^3} + \cdots$$

für Φ_3 nach (13)

$$\Phi_3 = -\frac{A^3\beta}{64\,(4-5\,\alpha)}\,(8 - \alpha - 9\,\alpha^3) = -\frac{A^3\beta}{2^6\left(-\frac{25}{8}\beta\,\xi + \cdots\right)}\left(\frac{4\cdot 3^4}{5^3} + \cdots\right).$$

Somit gilt für $\xi < 0$ und große Beträge von ξ

$$\Phi_3 = \frac{3^4\,A^3}{2\cdot 5^5\,\xi} + \cdots = \varphi_{30}\,. \qquad (22)$$

Beide Entwicklungen stimmen also im Leitterm überein. Da die Grundlösung bis zu $|\xi_0| = 0{,}13224\,A^2$ konvergiert [vgl. w. u. Gl. (27)], müssen für große $|\xi|$ beide Entwicklungen überhaupt übereinstimmen, also nur Umordnungen voneinander sein. Das ist für das Glied $\sim 1/\xi^2$ auch noch leicht zu zeigen, wenn man den expliziten Ausdruck für φ_{32} nach Potenzen von $1/\xi$ entwickelt. φ_{32} enthält ja einen Term der Form $\beta^2/(4-5\,\alpha)^2$, der offensichtlich $\sim 1/\xi^2$ ausfällt. Aber dieser explizite Nachweis ist überflüssig. da ja nach (27) die Konvergenzgrenze der Grundlösung bekannt ist. Entsprechendes gilt für den Bereich rechts von dem kritischen Wert von α.

Für große positive ξ hat unsere Gleichung (20) eine kleine positive Wurzel, die in erster Näherung genau wie oben gegeben ist durch

$$\varphi_{30} = \frac{3^4\,A^3}{2\cdot 5^5\,\xi} + \cdots\,. \qquad (23)$$

Diese Lösung schließt nun wiederum glatt an die Grundlösung in dem Bereich $4/5 < \alpha < 12/13$ an, wie aus (22) unmittelbar folgt. Denn die Grundlösung ist ja in diesem Bereich für hinreichend kleine β wiederum konvergent, wenn nur gilt (als Ungleichung hinsichtlich der Größenordnung in β)

$$\frac{4}{5} + \beta \ll \alpha \ll \frac{12}{13} - \beta\,. \qquad (24)$$

Die beiden anderen Wurzeln werden im Falle großer positiver ξ ebenfalls betragsmäßig sehr groß; man erhält für sie in erster Näherung

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_{30})_2 &= \frac{25}{3}\sqrt{\frac{10\,\xi}{123}} + \frac{9}{82}A + \left[\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right],\\ (\varphi_{30})_3 &= -\frac{25}{3}\sqrt{\frac{10\,\xi}{123}} + \frac{9}{82}A + \left[\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Die negative Wurzel $(\varphi_{30})_3$ entspricht der Fortsetzung der Grundlösung aus dem Bereich $\alpha < 4/5$ in dem Bereich $\alpha \sim 4/5$ und zeigt, daß dort beliebig große Amplituden des Gliedes $\sin 3\,\tau$ auftreten, dieser Zweig der Grundlösung also gegen die Oberschwingung konvergiert, die dem Grenzfall $A \to 0$ entspricht.

Um das Verhalten der Grundschwingung an dieser Stelle voll überblicken zu können, bestimmen wir noch den kritischen Wert von ξ, für den die beiden positiven Wurzeln in eine Doppelwurzel zusammenfallen. Mit den üblichen Methoden der Algebra findet man

$$\xi_0 = -\,0{,}13224\,A^2\,, \qquad x_{1,2} = 0{,}37288\,, \qquad x_3 = -\,0{,}52630\,. \qquad (26)$$

Wenn man $|\varphi_{30}|$ über α aufträgt, erhält man Abb. 1, wobei der Maßstab auf der α-Achse so gewählt ist, das $\xi_0\,\beta$, das ja von der Ordnung β ist, als endliche Strecke erscheint. Aus Abb. 1 entnimmt man zunächst auf Grund bekannter Sätze der Reihenlehre, daß die Konvergenzgrenze unserer Grundlösung genau an der Stelle

$$\alpha = \frac{4}{5} - \frac{5}{8}\cdot 0{,}13224\,\beta\,A^2 \equiv \frac{4}{5} - \varepsilon \qquad (27)$$

liegt, sie also für $\alpha = 4/5 + \varepsilon$ wiederum konvergent wird, falls man der zweiten Singularität bei $\alpha = 12/13$ nicht zu nahe kommt.

Weiter entnehmen wir aus Abb. 1, daß keine Verzweigung der Lösung vorliegt, denn auf dem von links herkommenden Ast ist $\varphi_{30} < 0$, während auf dem anderen, bei $\alpha = 4/5 - \varepsilon$ einsetzenden Ast $\varphi_{30} > 0$ ist. Der Schnittpunkt kommt nur dadurch zustande, daß wir den Betrag von φ_{30} aufgetragen haben. Vielmehr gibt es in diesem Bereich von α zwei periodische Lösungen mit der Frequenz der Grundschwingung, die einen so großen Anteil der Oberschwingung enthalten, daß sie sehr rasch nicht mehr von dieser unterschieden werden können; nur bei der dritten Lösung klingt dieser Anteil der Oberschwingung sehr rasch ab. Aber diese „echten" Grundschwingungen können beim Durchgang durch die kritische α-Stelle nicht störungsfrei ineinander übergehen, da das Vorzeichen von φ_{30} bei diesem Durchgang wechseln muß. In dem Bereich hart links von $\alpha = 4/5$ enthalten alle drei Lösungen ungefähr gleich starke Anteile der Oberschwingung, und es ist a priori nicht klar, ob und welche dieser drei Lösungen instabil sind. Genauen Aufschluß darüber könnte natürlich nur eine Stabilitätsrechnung bringen. Vermutlich wird wohl die Grundschwingung, wenn man von links her mit α gegen die kritische Stelle geht, in die ja sicher stabile Oberschwingung übergehen, also kein Sprung auf den unteren Ast der Kurve $\varphi_{30} > 0$ stattfinden. Kommt man jedoch von rechts her an die kritische Stelle heran, so muß die Lösung auf dem unteren Ast irgendwann instabil werden, spätestens natürlich für $\alpha = 4/5 - \varepsilon$ und in die Lösung des Astes $\varphi_{30} < 0$ umschlagen.

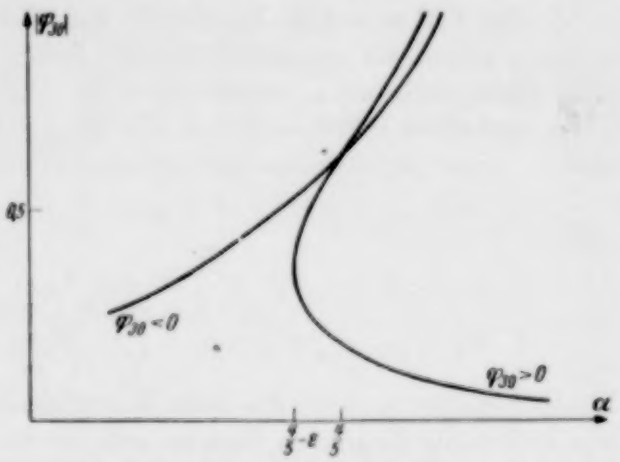

Abb. 1. Der Verlauf von $|\varphi_{30}|$ über α in der Umgebung der kritischen Stelle $\alpha = 4/5$.

Den Verlauf der Schwingung über die erste Viertelperiode, wie er sich aus der Überlagerung der beiden endlichen Bestandteile der Lösungen ergibt, zeigen für $\alpha = 4/5 - \varepsilon$, also für den kritischen Wert von α Abb. 2 und 3, und zwar Abb. 2 für die positive Doppelwurzel, Abb. 3 für die zugehörige negative Wurzel gemäß (27). Beide Bilder zeigen deutlich, daß sowohl $\dot{\vartheta}$ wie $\dot{\varphi}$ zweimal verschwinden, die Abb. 3 deutlicher, weil hier der Anteil der Oberschwingung größer ist.

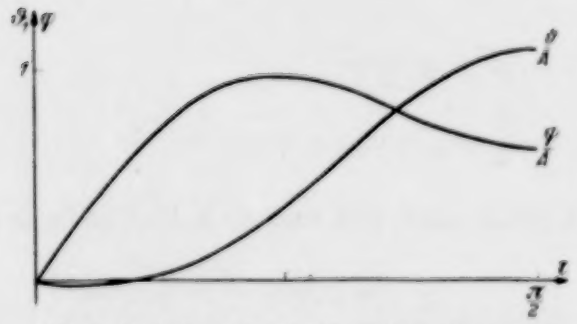

Abb. 2. Verlauf von ϑ und φ für die Doppelwurzel bei $\alpha = 4/5 - \varepsilon$ während der ersten Viertelperiode.

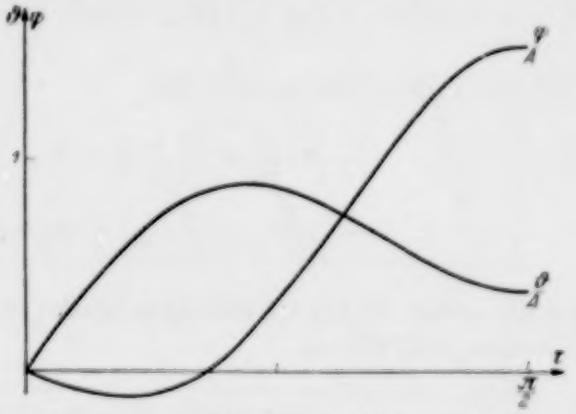

Abb. 3. Verlauf von ϑ und φ für die dritte, negative Wurzel bei $\alpha = 4/5 - \varepsilon$ während der ersten Viertelperiode.

Es ist hier der Ort, kurz auf die Verhältnisse beim Doppelpendel gleicher Massen und gleicher Fadenlängen einzugehen. Wenn auch unsere Gleichungen (1) nicht die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels bei Berücksichtigung aller Glieder dritter Ordnung darstellen, sondern nur für $\beta = -1/6$ den Anteil der Schwere in dieser Näherung richtig wiedergeben, so kann man doch erwarten, daß der Vorgang wenigstens qualitativ richtig erfaßt wird. Und da für gleiche Massen gilt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 = \frac{4}{5} - 0{,}093\,, \tag{28}$$

so sieht man sofort, daß für Amplituden A nach (27) mit

$$\frac{1}{6} A^2 \geqq 0{,}7 \cdot 1{,}6\,, \qquad A \geqq \sqrt{6{,}72} \approx 2{,}6 \tag{28b}$$

bereits der kritische Bereich erreicht wird. Man wird also vermuten dürfen, daß bei diesem Doppelpendel etwa für Ausschläge der Größenordnung $\pi/2$ in der Schwingungsform der Grundschwingung sich bereits ein merkbarer Anteil der Oberschwingung zeigen wird.

Bevor wir uns zur Auflösung der Divergenz unserer Grundlösung für sehr kleine α wenden, wollen wir uns noch kurz mit dem Falle $\alpha = 3/5$ beschäftigen, bei dem das Verhältnis der Frequenzen $\omega_{10}:\omega_{20}$ gleich 1:2 ist. Hier läge also, wenn die Grundschwingung ein Glied mit $\sin 2\tau$ enthalten kann, wiederum Resonanz mit dem Grundterm der Oberschwingung vor. Wir wollen zeigen, daß in der Umgebung dieses α-Wertes in der Tat neben unserer Grundlösung auch Lösungen mit der Frequenz der Grundschwingung existieren, die auch die geraden Sinus-Glieder enthalten; aber im Gegensatz zu dem eben untersuchten Falle werden wir zeigen, daß hier eine echte Verzweigung der Lösung vorliegt.

4. Der Fall $\alpha = 3/5$. Da die Rechnung hier prinzipiell genau so verläuft, wie im zweiten Abschnitt, wollen wir uns möglichst kurz fassen. Wir setzen also ϑ und φ jetzt als *Fourier*-Reihen mit allen Sinusgliedern an, wobei neben $\Phi_1 = A$ und Θ_1 jetzt auch Φ_2 und Θ_2 jeweils einen endlichen Term enthalten sollen, während alle übrigen Φ_ν und Θ_ν mindestens von der Ordnung β sind. Es gilt also

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 = \frac{9}{25} + \beta\,\xi\,, \qquad 1 + \varkappa = \frac{5}{8} + \varkappa_1\beta + \dots\,, \\ &\Phi_1 = A\,, \qquad \Theta_1 = \frac{3}{5}A + \beta\,\vartheta_{11} + \dots\,, \\ &\Phi_2 = \varphi_{20} + \beta\,\varphi_{21} + \dots\,, \qquad \Theta_2 = \vartheta_{20} + \beta\,\vartheta_{21} + \dots\,, \qquad \Theta_3 = \beta\,\vartheta_{31} + \dots\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Damit erhalten wir für die sechs Koeffizienten $\varkappa_1$, ϑ_{11}, φ_{20} . . . ϑ_{21} nach der gleichen Schlußweise wie Ziff. 3 die folgenden Gleichungen, in der die Glieder der Ordnung β voll berücksichtigt sind:

$$\left.\begin{aligned} &-\left(\frac{5}{8} + \varkappa_1\beta\right)\left[\frac{3}{5}A + \beta\,(\vartheta_{11} + \xi\,A) + \frac{9}{25}A\right] + \frac{3}{5}A + \beta\,\vartheta_{11} + \frac{3}{4}\beta\left[\left(\frac{3}{5}A\right)^3 + \frac{6}{5}A\,\vartheta_{20}^2\right] = 0\,, \\ &-\left(\frac{5}{8} + \varkappa_1\beta\right)\left(\frac{8}{5}A + \beta\,\vartheta_{11}\right) + A + \frac{3}{4}\beta\,(A^3 + 2\,A\,\varphi_{20}^2) = 0\,; \\ &-4\left(\frac{5}{8} + \varkappa_1\beta\right)\left[\vartheta_{20} + \frac{9}{25}\varphi_{20} + \beta\left(\xi\,\varphi_{20} + \vartheta_{21} + \frac{9}{25}\varphi_{21}\right)\right] + \vartheta_{20} + \beta\,\vartheta_{21} + \frac{3}{4}\beta\left[\vartheta_{20}^3 + 2\left(\frac{3}{5}A\right)^2\vartheta_{20}\right] = 0, \\ &-4\left(\frac{5}{8} + \varkappa_1\beta\right)[\vartheta_{20} + \varphi_{20} + \beta\,(\vartheta_{21} + \varphi_{21})] + \varphi_{20} + \beta\,\varphi_{21} + \frac{3}{4}\beta\,(\varphi_{20}^3 + 2\,A^2\varphi_{20}) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die Glieder nullter Ordnung liefern

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}A + \frac{3}{5}A = 0\,, \qquad -A + A = 0\,, \\ &-\frac{5}{2}\left(\vartheta_{20} + \frac{9}{25}\varphi_{20}\right) + \vartheta_{20} = 0\,, \qquad -\frac{5}{2}(\vartheta_{20} + \varphi_{20}) + \varphi_{20} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei die ersten beiden Gleichungen wieder identisch erfüllt sind, während die beiden anderen übereinstimmen, und liefern

$$\vartheta_{20} + \frac{3}{5}\varphi_{20} = 0\,, \qquad \vartheta_{20} = -\frac{3}{5}\varphi_{20}\,. \tag{31a}$$

Die Glieder erster Ordnung liefern, wenn wir $\vartheta_{20} = -\frac{3}{5}\varphi_{20}$ gleich einsetzen

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_{11} - \frac{64}{25}\varkappa_1 A - \frac{5}{3}A\,\xi + 2\left(\frac{3}{5}\right)^3(A^3 + 2\,A\,\varphi_{20}^2) = 0\,, \\ &\vartheta_{11} + \frac{64}{25}\varkappa_1 A \qquad\qquad - 2\left(\frac{3}{5}\right)(A^3 + 2\,A\,\varphi_{20}^2) = 0\,; \\ &\vartheta_{21} + \frac{3}{5}\varphi_{21} + \frac{5}{3}\xi\,\varphi_{20} - \frac{16}{25}\varkappa_1\varphi_{20} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3[\varphi_{20}^3 + 2\,A^2\varphi_{20}] = 0\,, \\ &\vartheta_{21} + \frac{3}{5}\varphi_{21} \qquad\qquad + \frac{16}{25}\varkappa_1\varphi_{20} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}[\varphi_{20}^3 + 2\,A^2\varphi_{20}] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

wobei die beiden letzten Gleichungen nur wieder verträglich sind, wenn

$$\frac{32}{25}\varkappa_1\varphi_{20} = \frac{5}{3}\xi\,\varphi_{20} + \frac{3}{10}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right](\varphi_{20}^3 + 2\,A^2\varphi_{20})\,. \tag{33}$$

Eliminieren wir aus dieser Gleichung und den beiden ersten Gleichungen (32) $\varkappa_1$ und ϑ_{11} und setzen $\varphi_{20} = A\,x$, so erhalten wir für x

$$\frac{25}{3}\xi A^2 x + \frac{6}{5}\cdot\frac{34}{25} A^4 x\,(1 - x^2) = 0\,, \tag{34}$$

also entweder

$$x_1 = 0$$

oder

$$x^2 = 1 + \frac{5^5}{36\cdot 17}\frac{\xi}{A^2}\,. \tag{35}$$

Somit werden die beiden anderen Wurzeln nur reell und dann entgegengesetzt gleich, wenn

$$\xi > \xi_0 = -\frac{36\cdot 17}{5^5} A^2\,. \tag{36}$$

Für $\xi = \xi_0$ werden auch die beiden nicht-trivialen Wurzeln Null; also tritt für

$$\alpha^2 = \frac{9}{25} + \beta\,\xi_0 = \frac{9}{25} - \frac{36\cdot 17}{5^5} A^2\beta \tag{37}$$

eine echte Verzweigung der Lösung auf; die dem Verzweigungsast (Abb. 4) zugeordnete periodische Lösung enthält einen für positive ξ sehr rasch wachsenden Anteil der Oberschwingung, ist also sehr bald nicht mehr von der Oberschwingung zu unterscheiden. Schon für $\xi = 0$ haben die beiden end-

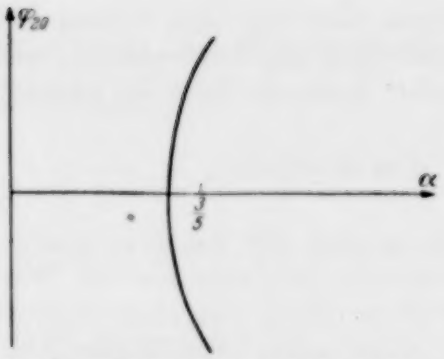

Abb. 4. Die Amitude φ_{20} über α in der Umgebung der Verzweigung bei $\alpha = 3/5$.

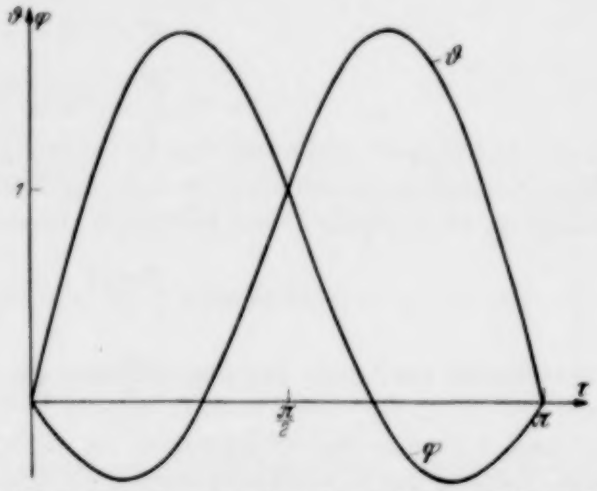

Abb. 5. Verlauf von ϑ und φ während der ersten Halbperiode für den dem Werte $\alpha = 3/5$ zugeordneten Wert von φ_{20} auf dem Verzweigungsast.

lichen Bestandteile der *Fourier*entwicklung für ϑ und φ gleiche Amplituden. Aus Abb. 5, in der für diesen Fall ϑ und φ für eine Halbperiode aufgetragen sind, ersieht man, daß während einer Halbperiode sowohl $\dot\vartheta$ wie $\dot\varphi$ zweimal verschwinden. Nach Verlauf einer Viertelperiode liegt jetzt kein Umkehrpunkt der Bewegung mehr vor, sondern beide Massen haben gleichen Ausschlag, aber entgegengesetzte Bewegungsrichtung. Diese Verzweigung dürfte beim Doppelpendel gleicher Massen nicht auftreten, da eine ähnliche Rechnung wie oben für die dazu erforderliche Amplitude liefert $A > 4{,}2$ also $A > \pi$.

Genau wie eben kann man in allen anderen Fällen vorgehen, wo die Frequenzen der Grund- und Oberschwingung der kleinen Schwingungen in ganzzahligem Verhältnis stehen. Wir wollen dabei drei Fälle unterscheiden.

a) Das Verhältnis $\omega_{20}:\omega_{10}$ ist eine ungerade Zahl. Hier wird qualitativ immer dasselbe auftreten, wie im Falle $n = 3$, den wir oben ausführlich besprochen haben: es gibt keine Verzweigung der Lösung, sondern es treten jeweils drei periodische Lösungen auf, von denen zwei einen so starken Anteil der Oberschwingung enthalten, daß sie, von einem schmalen Streifen der Ordnung β um den kritischen Wert von α herum abgesehen, nicht von der Oberschwingung zu unterscheiden sind.

b) Das Verhältnis $\omega_{20}:\omega_{10}$ ist eine gerade ganze Zahl. Hier gibt es immer eine echte Verzweigung der Lösung von der Art, wie wir es eben für $n = 2$ besprochen haben. Eine Lösung enthält keinen Anteil der Oberschwingung, die beiden anderen enthalten die Oberschwingung, und zwar außerhalb des β-Streifens so stark, daß sie wie im ersten Falle nicht von der Oberschwingung zu unterscheiden sind.

c) Das Verhältnis $\omega_{20}:\omega_{10}$ ist rational, aber nicht ganz. Wiederum ergibt sich eine echte Verzweigung, mit den gleichen Eigenschaften wie im zweiten Fall. Wir haben den einfachsten Fall $\omega_{20}:\omega_{10} = 3:2$ durchgerechnet, wollen aber auf die Wiedergabe dieser Rechnung verzichten, da sie prinzipiell nichts Neues bringt, Nur soviel sei erwähnt, daß man, um die Verzweigung der Lösung zu erhalten, für ϑ und φ Fourierreihen ansetzen muß, die nach Vielfachen von $\tau/2$ fortschreiten, also

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \Theta_{1/2}\sin\frac{\tau}{2} + \Theta_1\sin\tau + \Theta_{3/2}\sin\frac{3\tau}{2} + \cdots, \\ \varphi &= \Phi_{1/2}\sin\frac{\tau}{2} + A\sin\tau + \Theta_{3/2}\sin\frac{3\tau}{2} + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Dabei werden auf dem Verzweigungsast, also für die Lösungen, die einen Anteil der Oberschwingung enthalten, die Glieder $\Theta_1, \Theta_{3/2}, \Phi_{3/2}$ endlich, während alle anderen Θ_ν und Φ_ν mindestens von der Ordnung β ausfallen.

5. Die periodischen Lösungen im Grenzfalle sehr kleiner α. Es bleibt noch die Singularität unserer Grundlösung für sehr kleine α zu klären. Wir fragen dazu zunächst, welche Aussagen die Theorie der kleinen Schwingungen in diesem Grenzfall zu machen gestattet. Läßt man in (3) $\alpha \to 0$ gehen, so fallen Grund- und Oberschwingung zusammen, also $\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_0$ und $\varphi = A\sin\omega_0 t$; $\vartheta \equiv 0$. Es gibt also nur noch eine Normalschwingung, da ja die Bewegungsgleichungen jetzt lauten

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = 0, \\ &\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Damit ist ϑ entkoppelt und kann sich unabhängig von φ bewegen. Gibt man aber ϑ einen auch noch so kleinen Ausschlag, so schwingt es mit der Frequenz ω_0, steht also mit dem unteren Pendel, das ja ebenfalls ω_0 als Eigenfrequenz besitzt, in Resonanz und liefert demnach für φ die Lösung

$$\varphi = A\sin\omega_0 t - \frac{B\omega_0 t}{2}\cos\omega_0 t \quad \text{mit} \quad \vartheta = B\sin\omega_0 t, \tag{40}$$

deren Amplitude im Laufe der Zeit beliebig groß wird. Also muß in der Tat $B = 0$ sein, also ϑ identisch verschwinden, wenn man in diesem Fall eine Normalschwingung erhalten will. Wir wollen untersuchen, wie sich die Verhältnisse im nicht-linearen Fall gestalten, vor allem feststellen, ob sich beim Vollzug des Grenzüberganges $\alpha \to 0$ in der Lösung selbst außer der trivialen $\vartheta \equiv 0$, die natürlich auch im nichtlinearen Fall auftritt, noch eine zweite periodische Lösung ergibt, mit einer von ω_0 verschiedenen Frequenz.

Dazu entwickeln wir die Lösungen der Gleichungen (11) nach Potenzen von α und behalten jeweils nur die Glieder höchster Ordnung in α^{-1} bei. Um das Bildungsgesetz dieser Glieder zu erkennen, muß man in der Berechnung bis zu den Gliedern in β^4 gehen. Wir wollen hier nur die Ergebnisse dieser an sich einfachen, aber recht zeitraubenden Rechnung angeben; man erhält

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{3}{8}A^2(1-\alpha) + \cdots, & \vartheta_{11} &= \frac{3}{8}A^3(1+\alpha) + \cdots, \\ \varphi_{32} &= -\frac{A^3}{256}(8+9a) + \cdots, & \vartheta_{32} &= \frac{9}{256}a^2A^3 + \cdots, \\ \varkappa_2 &= -\frac{9}{128}\frac{A^4}{\alpha} + \frac{3A^4}{2^8} + \cdots, & \vartheta_{12} &= \frac{9}{128}\frac{A^5}{\alpha} + \frac{3A^5}{2^8} + \cdots, \\ \varkappa_3 &= \frac{45}{2^{11}}\frac{A^6}{\alpha} + \cdots, & \vartheta_{13} &= -\frac{45}{2^{11}}\cdot\frac{A^7}{a} + \cdots, \\ \varkappa_4 &= -\frac{81}{2^{15}}\frac{A^8}{\alpha^3} + \cdots. & \vartheta_{14} &= \frac{81}{2^{15}}\frac{A^9}{\alpha^3} + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Es gilt also für den Term jeweils höchster Ordnung in α^{-1} die Relation

$$A\,\varkappa_1 \approx \vartheta_{11}\,, \qquad \vartheta_{1,m} \approx -A\,\varkappa_m \qquad \text{für} \qquad m = 2,\ 3,\ 4\ . \tag{42}$$

Beschränken wir uns also auf diese Terme höchster Ordnung in α^{-1}, so erhalten wir dafür aus den Gleichungen (11) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\,\vartheta_{1,m} - \alpha\,A\,\varkappa_m - (\varkappa_1\,\vartheta_{1,m-1} + \varkappa_2\,\vartheta_{1,m-2} + \cdots + \varkappa_{m-1}\,\vartheta_{11}) \approx 0\,,\\ &\vartheta_{1,m} + A\,\varkappa_m + (\varkappa_1\,\vartheta_{1,m-1} + \varkappa_2\,\vartheta_{1,m-2} + \cdots + \varkappa_{m-1}\,\vartheta_{11}) \approx 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Denn wenn auch in den von $\beta\,\vartheta^3$ bzw. $\beta\,\varphi^3$ herrührenden Gliedern allmählich Terme mit Potenzen von α^{-1} auftreten, so beeinflussen diese Terme doch nicht die Glieder der höchsten Ordnung in α^{-1} für $\vartheta_{1,m}$ und $\varkappa_m$. Nehmen wir die Relation (42) bis $m-1$ als bewiesen an, so zerstören sich in der Klammer das erste und letzte Glied, und der Vergleich beider Gleichungen zeigt, daß $\vartheta_{1,m} \approx -A\,\varkappa_m$, also (42) auch für m gilt. Setzt man also $\vartheta_{1,m} \approx -A\,\varkappa_m$ in die erste Gleichung ein, so sieht man, daß für $m \geqq 4$ für die $\varkappa_m$ die Funktionalgleichung — als Größenordnungsrelation — besteht

$$2\,\alpha\,\varkappa_m \approx \varkappa_2\,\varkappa_{m-2} + \varkappa_3\,\varkappa_{m-3} + \cdots + \varkappa_{m-2}\,\varkappa_2 \quad (m \geqq 4)\ . \tag{44}$$

Setzen wir nun

$$y = \varkappa_2\,\beta^2 + \varkappa_3\,\beta^3 + \cdots, \tag{45}$$

so wird offenbar

$$y^2 = \varkappa_2^2\,\beta^4 + (\varkappa_2\,\varkappa_3 + \varkappa_3\,\varkappa_2)\,\beta^5 + \cdots\,, \tag{46}$$

so daß die Funktionalgleichung (44) gelöst wird durch

$$2\,\alpha\,(y - \varkappa_2\,\beta^2 - \varkappa_3\,\beta^3) = y^2\ , \tag{47}$$

also

$$y = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{64}\,\beta^2\,A^4 - \frac{45}{2^{10}}\,\beta^3\,A^6} \tag{48}$$

(das Plus-Zeichen der Wurzel scheidet für $\alpha > 0$ aus).

Damit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} 1 + \varkappa &= \frac{1}{1+\alpha} + \frac{3}{8}\,\beta\,A^2\,(1-\alpha) + \alpha - \sqrt{\ } = 1 + \frac{3}{8}\,\beta\,A^2\,(1-\alpha) - \sqrt{\ } + [\alpha^2]\,,\\ \Theta_1 &= \alpha\,A + \frac{3}{8}\,\beta\,A^3\,(1+\alpha) - \alpha\,A + A\sqrt{\ } = \frac{3}{8}\,\beta\,A^3\,(1+\alpha) + A\sqrt{\ } + [\alpha^2]\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ist $\alpha < 0$, so muß bei der Wurzel das andere Vorzeichen gewählt werden. Diese Teilsummation ist zweifellos gestattet, solange die Wurzel nach fallenden Potenzen von α entwickelt werden kann, also solange $|\alpha| > 3/8\,\beta\,A^2$ ist. Da aber (48) auch einen Sinn behält, wenn diese Grenze für α unterschritten wird, so wollen wir versuchsweise den Grenzübergang $\alpha \to 0$ vollziehen. Dabei dürfen wir wegen der übrigen Vernachlässigungen natürlich die Lösung, wenn überhaupt, nur einschließlich der Terme in β benutzen. Wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel erhalten wir so zwei Lösungen, eine langsame Schwingung

$$\varkappa = 0\ , \qquad \varphi = A\sin\tau\ , \qquad \vartheta = \frac{3}{4}\,\beta\,A^3\sin\tau$$

und eine rasche

$$1 + \varkappa = 1 + \frac{3}{4}\,\beta\,A^2\,, \qquad \varphi = A\sin\tau\,, \qquad \vartheta = 0\,.$$

Die zweite ist die triviale, mit $\vartheta \equiv 0$ und der *Duffing*schen Differentialgleichung für φ, deren Frequenz auch den richtigen β-Term liefert. Die langsame liefert die Frequenz ω_0, aber für ϑ eine Amplitude der Ordnung β. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Lösung in der Tat für das nichtlineare System im Grenzfall $\alpha \to 0$ als rein periodische Lösung existiert, indem wir ansetzen

$$\Theta_1 = \beta\,\vartheta_{11} + \beta^2\,\vartheta_{12} + \cdots, \qquad 1 + \varkappa = 1 + \varkappa_3\,\beta^3 + \varkappa_4\,\beta^4 + \cdots,$$
$$\Theta_3 = \beta^3\,\vartheta_{33} + \cdots\,, \qquad \Phi_3 = \beta^3\,\varphi_{33} + \cdots\ .$$

Die Gleichungen (11) liefern dann, mit $\alpha^2 = 0$, in der üblichen Weise durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{11} &= \frac{3}{4} A^3, \qquad \vartheta_{12} = \frac{3}{128} A^5, \qquad \varphi_{33} = -\frac{A^3}{32}, \qquad \vartheta_{33} = -\frac{\vartheta_{11}^2}{32}, \\ \varkappa_3 &= \left(\frac{3A^2}{4}\right)^3, \qquad \varkappa_4 = \frac{1}{32}\left(\frac{3A^2}{4}\right)^4. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Damit ist gezeigt, daß auch für diesen Grenzfall zwei rein-periodische Lösungen auftreten, deren *Fourier*-Entwicklungen für hinreichend kleine β konvergieren.

(Eingegangen am 3. November 1956.)

Anschrift des Verfassers:
Professor Dr. *C. Schmieden*, Darmstadt, Technische Hochschule, Mathematisches Institut.

Soeben erschien:

Elementare Schalenstatik

Von Dr.-Ing. habil. **Alf Pflüger**
Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Zweite erweiterte Auflage der Einführung in die Schalentechnik

Mit 56 Abbildungen. VII, 112 Seiten. Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 19,50

Inhaltsübersicht: **I. Einleitung.** Allgemeines. Rechnungsgrundlagen. — **II. Membrantheorie der Rotationsschalen.** Geometrie der Rotationsschalen. Rotationsschalen im Kuppelbau. Rotationsschalen im Behälterbau. — **III. Biegetheorie der drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen.** Gleichgewicht am Schalenelement. Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen. Kreiszylinderschale. Näherungslösung für beliebige Rotationsschalen. — **IV. Membrantheorie der Zylinderschalen.** Kreiszylinderschale mit waagerechter Achse unter Eigengewicht. Zylinderschalen allgemeiner Form. — **V. Membrantheorie allgemeiner Schalen.** Bezeichnungen und geometrische Beziehungen. Gleichgewichtsbedingungen. Differentialgleichung. Hyperbolische Paraboloidschale unter Schneedruck. — **VI. Einzelheiten des Spannungszustandes.** Berechnung der Spannungen aus den Schnittgrößen. Abhängigkeit des Spannungszustandes von der Schnittrichtung. — **VII. Anhang.** Schrifttumshinweise. Zusammenstellung von Lösungen der Membrantheorie. — **Sachverzeichnis.**

Soeben erschien:

Stützmomenten-Einflußfelder durchlaufender Platten

Von Dr.-Ing. **Günther Hoeland,** Hannover

Mit 8 Abbildungen und 75 Tafeln. 19 Seiten Text und 75 Tafeln 4°. 1957. Ganzleinen DM 37,50

Inhaltsverzeichnis: Erster Teil. **Allgemeine Angaben:** Einleitung. Die Ermittlung der Stützmomenten-Einflußfelder durchlaufender elastischer Platten. Angrenzende schiefwinklige Platten. Auswertung der Einflußfelder. Vergleich mit den Näherungsverfahren der DIN 1075. Literatur. — Zweiter Teil. **Tafelsammlung:** Erläuterungen zu den Tafeln. Zusammenstellung der Tafeln. Tafeln 1—8 m_y-Stützmomenten-Einflußfelder von Einfeldplatten. Tafeln 9—21 Einflußfelder für die Momente über der starren Zwischenstütze durchlaufender symmetrischer Platten. Tafeln 22—67 Einflußfelder für die Momente über der starren Zwischenstütze durchlaufender unsymmetrischer Platten. Tafeln 68—75 Einflußfelder für die Momente über der elastischen Zwischenstütze durchlaufender symmetrischer Platten.

Das vorliegende Buch wendet sich an den Plattenstatiker und bringt eine Auswahl fertig berechneter Einflußfelder für die Stützmomente durchlaufender elastischer Platten, führt also die genaue Berechnung auf die Auswertung der Einflußfelder zurück. Um auch diese Auswertung noch weiter zu vereinfachen, wurden darüber hinaus die Momente für Vollast durch Integration gewonnen und in besonderen Tabellen zusammengestellt. Neben einigen Einflußfeldern drei- und vierseitig gestützter Einfeldplatten werden im wesentlichen durchlaufende Platten behandelt, deren Berechnung bisher in den meisten Fällen nur näherungsweise möglich war. Symmetrische und unsymmetrische Plattenpaare liegen in einer solchen Vielzahl vor, daß wohl in fast allen vorkommenden Fällen die Stützmomente durchlaufender Platten nunmehr mit genügender Genauigkeit ermittelt werden können. Bei acht Tafeln wurde die elastische Nachgiebigkeit der Zwischenstütze berücksichtigt. Um hier genauere Angaben über den Verlauf der Momente zu erhalten, wurden diese Tafeln für die Mitte und den Viertelspunkt über der Zwischenstütze aufgestellt. Ein besonderer Abschnitt befaßt sich mit schiefwinkligen Endfeldern. Die Theorie der Momenteneinflußfelder wird nur kurz gestreift, da sie für die praktische Auswertung der Tafeln ohne Bedeutung ist. Sie interessiert in erster Linie den Theoretiker und wurde in der Literatur schon oft behandelt. Das Buch aber wendet sich in erster Linie an den Statiker in der Praxis. Es vereinfacht seine Arbeit wesentlich und hilft ihm gleichzeitig, die Durchlaufwirkung elastischer Platten genauer zu erfassen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Soeben erschien:

v. Mises/Hohenemser

Fluglehre

Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung

Sechste Auflage

neu bearbeitet von Dr.-Ing. **Kurt Hohenemser**
Abteilungsleiter der McDonnell Aircraft Corp.
und Gastprofessor an der Washington Universität St. Louis, Mo./USA

Mit 199 Abbildungen. XI, 402 Seiten 8°. 1957. Ganzleinen DM 25,50

Inhaltsübersicht: Einleitung. Entwicklung des Flugwesens und der Fluglehre, Rekordtabelle. — **I. Allgemeines über Luftkräfte, Luftwiderstand.** Luftdruck. Luftdichte. Inkompressible Strömung. Kompressible Strömung. Luftwiderstand in Unterschallströmung. Luftwiderstand in Überschallströmung. Widerstandsbeizahlen verschiedener Körper. — **II. Die Tragfläche.** Luftkräfte auf die Tragfläche. Querschnitt der Tragflügel. Grundriß der Tragflügel. Die Tragfläche in Überschallströmung. Der Aufbau der Tragflächen. Der Gleitflug. — **III. Motorloser Flug.** Fliegen aus eigener Kraft. Segelfliegen. Segelflugzeuge. — **IV. Die Luftschraube.** Die Wirkungsweise der Luftschraube. Die Kennlinien von Verstellschrauben. Herstellung und Prüfung der Luftschrauben. — **V. Das Triebwerk.** Allgemeines über Flugzeugtriebwerke. Kolbentriebwerke und ihre Kennlinien. Aufbau der Kolbenmotoren und ihre Einzelteile. Strömungstriebwerke und ihre Kennlinien. Aufbau der Gasturbinentriebwerke und ihre Einzelteile. — **VI. Flugleistungen.** Waagrechtflug. Steigflug. Reichweite. Messung der Flugleistungen. — **VII. Steuerung und Stabilität.** Flossen, Ruder, Steuerungen. Wirkung der Ruder. Längs- und Querstabilität. Automatische Flugzeugsteuerung. — **VIII. Abflug und Landung.** Hilfsmittel für Abflug und Landung. Der Abflugvorgang. Der Landevorgang. — **IX. Das Drehflügelflugzeug.** Allgemeines über Schraubenflugzeuge. Der vertikale Flug. Der Vorwärtsflug. Blattbewegungen. Hubschraubersteuerung, Stabilität, Schwingungen. — **X. Kursbestimmung und Flugbeförderung.** Einfluß des Windes auf Kurs und Flugdauer. Funknavigation. Die direkten Kosten der Flugbeförderung. Einige neuere Flugzeugmuster. — **Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen. — Namen- und Sachverzeichnis. — Zahlentafeln.**

Die sechste neubearbeitete Auflage der bekannten v. Misesschen Fluglehre nimmt ebenso wie ihre Vorgänger eine Sonderstellung in der Fachliteratur ein. Das Buch vermeidet einerseits die Oberflächlichkeit populärer Darstellungen und weicht den begrifflichen Schwierigkeiten, die in der Natur der Sache liegen, nicht aus, erfordert jedoch andererseits von dem Leser nur ein Minimum an Vorkenntnissen. Die physikalischen Prinzipien des Flugwesens werden von Grund auf entwickelt, ohne dabei die formalen Methoden der Differential- und Integralrechnung zu verwenden. Für Tragflächen- und Luftschraubenberechnung werden elementare aerodynamische Theorien zusammen mit verallgemeinerten Versuchsergebnissen herangezogen. Die Darstellung idealisierter thermodynamischer Prozesse der Kolbentriebwerke, der Gasturbinen und der Düsentriebwerke wird ergänzt durch eine Beschreibung der wesentlichen Einzelteile und Funktionen dieser Triebwerke. Die Flugleistungen werden sowohl vom Standpunkt ihrer Vorausberechnung wie auch ihrer Ermittlung im Fluge behandelt. Die Ausführungen über Steuerung und Stabilität umfassen die Grundlagen der automatischen Flugzeugsteuerungen. Die aerodynamische Theorie der Drehflügelflugzeuge schließt den vertikalen Flug und den Vorwärtsflug ein. An Sonderproblemen werden erörtert: Abflug und Landung, Kursbestimmung (Funknavigation) und Flugbeförderungskosten. Da trotz der Beschränkung auf die elementarsten mathematischen Hilfsmittel wo immer möglich bis zur quantitativen Behandlung der Fragen vorgedrungen wird, kann das Buch auch dem angehenden Ingenieur, der sich der Flugtechnik erst zuwenden will, als erste Einführung dienen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.